Krajská komisia Matematickej olympiády v Košiciach

Ústav matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach
Združenie STROM
Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Návodné úlohy
k domácemu kolu
Matematickej olympiády
kategórií A, B a C
v školskom roku 2010/2011

Košice 2010

A-I-1

- Dokážte, že ak má rovnica $a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2(n-1)} + \cdots + a_2 x^4 + a_1 x^2 + a_0 = 0$ koreň t, jej koreňom je aj $-t$.
- Dokážte, že ak má rovnica $a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ rôzne korene t_1, t_2, t_3, t_4, je ekvivalentná s rovnicou $a_4(x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)(x - t_4) = 0$.

A-I-2

- Dokážte, že ak sú x a y nesúdeliteľné prirodzené čísla väčšie než 2, tak v množine čísel $\{sy + 2 : 0 \le s < x\}$ majú všetky jej prvky po delení číslom x rôzne zvyšky.
- Na základe predchádzajúcej úlohy ukážte, že ak sú x a y nesúdeliteľné prirodzené čísla väčšie než 2, tak existuje prirodzené číslo n také, že $x \mid n + 1$ a $y \mid n - 1$.

A-I-3

- Nech ABC je trojuholník a D bod rôzny od A i B. Dokážte, že $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ACB|$ platí práve vtedy, keď je priamka DA dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku ABC.

A-I-4

- Majme $6n$ žetónov až na farbu zhodných, po troch z každej z $2n$ farieb. Dokážte, že počet všetkých takých rozdelení týchto žetónov na dve kôpky po $3n$ žetónoch, že žiadne tri žetóny rovnakej farby nie sú v rovnakej kôpke, je rovnaký ako počet všetkých takých rozdelení $2n$ rôznofarebných žetónov na dve kôpky po n žetónoch.
- Označme $\mathrm{d}(t)$ najvyššiu mocninu 2, ktorou je deliteľné kladné číslo t. Dokážte, že platí
$$\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a) + \mathrm{d}(b).$$
- Označme $\mathrm{d}(t)$ najvyššiu mocninu 2, ktorou je deliteľné kladné číslo t. Dokážte, že platí
$$\mathrm{d}(k!) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k}{2^\ell} \right\rfloor + \cdots.$$

A-I-5

- Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Dokážte, že po konečnom počte vhodných krokov možno dosiahnuť, aby na hornej a dolnej stene boli rovnaké čísla.
- Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Dokážte, že po konečnom počte vhodných krokov možno dosiahnuť, aby na hornej a dolnej stene boli rovnaké čísla a ostatné čísla boli párne.

A-I-6

- Nech ABC je trojuholník s ostrým uhlom pri vrchole C a nech P je päta jeho výšky z C na AB. Nech D je bod polpriamky PC taký, že $\sphericalangle ADB$ je pravý. Ukážte, že D leží vnútri úsečky PC.

- Dokážte, že v každom trojuholníku ABC platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 4\sqrt{3} \cdot \mathrm{S}(ABC).$$

Dokážte tiež, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď je trojuholník rovnostranný.

B-I-1

- Dokážte, že pre všetky trojice reálnych čísel x, y, z platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

- Dokážte, že pre všetky trojice reálnych čísel x, y, z platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2x + 2y + 2z - 3.$$

- V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y} &= y + 1, \\ \sqrt{y^2 + x} &= x + 1. \end{aligned}$$

- V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 &= 2y - 1, \\ y^2 &= 2x - 1. \end{aligned}$$

- V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= z^2 + 1, \\ y + z &= x^2 + 1, \\ z + x &= y^2 + 1. \end{aligned}$$

B-I-2

- Nech P je vnútorný bod daného obdĺžnika $ABCD$. Označme postupne Q, R obrazy bodu P v súmernostiach podľa stredov A, C. Dokážte, že priamky AC a QR sú rovnobežné.
- Sú dané kladné čísla a a b. Zostrojte úsečky dĺžky $\frac{a^2}{b}$.
- Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná dĺžka strany BC, dĺžka strany AC a dĺžka ťažnice z bodu C.
- Sú dané dve kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v dvoch bodoch. Zostrojte priamku prechádzajúcu jedným z nich tak, aby na kružniciach k a l vytínala tetivy rovnakej dĺžky.
- V rovine sú dané body A, T, X a Y. Zostrojte množinu všetkých bodov C, pre ktoré existuje bod B na úsečke XY taký, že ťažisko trojuholníka ABC je bod T.
- Je daný obdĺžnik $ABCD$, priamka p a bod S. Zostrojte úsečku XY tak, aby jej stredom bol bod S, bod X ležal na priamke p a bod Y na niektorej zo strán obdĺžnika. Diskutujte o počte riešení.

B-I-3

- Nech x, y a z sú nezáporné čísla. Dokážte, že ich tzv. kvadratický priemer nie je menší než ich aritmetický priemer, t. j. že

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}.$$

- Uvažujme dve nezáporné reálne čísla x a y, ktorých súčet je 1. Určte, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobúdať výraz

  a) $x \cdot y$,

  b) $x^2 + y^2$,

  c) $\frac{1}{(1+x)(1+y)}$.

  Zistite tiež, pre ktoré dvojice x a y sa tieto hodnoty nabodúdajú.

- Uvažujme tri nezáporné reálne čísla x, y, z, ktorých súčet je 1. Určte akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobúdať výraz

  a) $x \cdot y \cdot z$,

  b) $xy + yz + zx$,

  c) $x^2 + y^2 + z^2$.

  Zistite tiež, pre ktoré trojice x, y, z sa tieto hodnoty nabodúdajú.

- Je daná kvadratická funkcia f, kde $f(x) = ax^2 + bx + c$, pričom $a > 0$, a reálne číslo S. Uvažujme všetky dvojice reálnych čísel x_1 a x_2 so súčtom S. Dokážte, že výraz $f(x_1) + f(x_2)$ nadobúda najmenšiu možnú hodnotu práve vtedy, keď $x_1 = x_2$.

- Platí predchádzajúce tvrdenie aj v prípade $a < 0$? (Ktorá vlastnosť danej funkcie je v tomto prípade kľúčová?)

B-I-4

- Dokážte, že ak $a \mid b$, tak $b = 0$ alebo $|a| \leq |b|$.

- Dokážte, že ak sú a a b nesúdeliteľnými deliteľmi c, tak aj ich súčin ab je deliteľom c.

- Nájdite všetky celé čísla, pre ktoré je hodnota zlomku $\frac{2n+3}{n-7}$ celým číslom.

- Nájdite všetky celé čísla, pre ktoré je hodnota zlomku $\frac{n^2+3}{n-7}$ celým číslom.

- Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je zlomok $\frac{n^3+6}{n^2+6}$ celým číslom.

- Dokážte, že druhá mocnina ľubovoľného celého čísla dáva po delení 4 zvyšok 0 alebo 1.

- Dokážte, že neexistuje prirodzené číslo k, pre ktoré je číslo $2^k + 6$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

- Nájdite všetky dvojice celých čísel a a b, pre ktoré platí

$$b(a^2 + b^2 + 2) = a(2b^2 + 3).$$

B-I-5

- Nájdite aspoň tri rôzne dôkazy tvrdenia, ktoré hovorí, že stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku leží v strede prepony tohto trojuholníka.
- Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Zistite kedy má obdĺžnik vpísaný do daného trojuholníka tak, že jedna jeho strana leží na prepone AB, najväčší možný obsah.
- V rovine sú dané dva rôzne body A a B. Nájdite geometrické miesto (všetkých) bodov C, pre ktoré je trojuholník ABC tupouhlý.
- Je daný trojuholník ABC. Označme A_1, B_1, C_1 stredy strán BC, CA, AB. Označme O priesečník výšok daného trojuholníka a A_0, B_0, C_0 päty výšok z vrcholov A, B, C. Napokon označme A_2, B_2, C_2 stredy úsečiek AO, BO, CO.
  - Dokážte, že trojuholníky A_1B_1C, $A_1B_1C_0$ a $B_1A_1C_1$ sú zhodné. Nájdite ďalšie štyri trojuholníky zhodné s týmito trojuholníkmi, ktorých vrcholy sú niektoré z daných bodov.
  - Dokážte, že trojuholník BB_2C_0 je rovnoramenný. Nájdite ešte niekoľko ďalších rovnoramenných trojuholníkov určených danými bodmi.
  - Dokážte, že $A_2C_1B_2O$ je rovnobežník. Nájdite niekoľko ďalších rovnobežníkov. Nájdite tiež niekoľko rovnoramenných lichobežníkov.
  - Dokážte, že body A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 ležia všetky na jednej kružnici (je to tzv. Feuerbachova kružnica alebo tzv. kružnica deviatich bodov).
  - Dokážte, že A_1A_2 (B_1B_2, resp. C_1C_2) je priemer Feuerbachovej kružnice.
  - Aký je pomer medzi polomerom Feuerbachovej kružnice a polomerom kružnice opísanej trojuholníku ABC?

B-I-6

- Nájdite všetky trojciferné čísla, ktoré sa škrtnutím niektorej svojej číslice 7-násobne zmenšia.
- Nájdite všetky štvorciferné čísla, ktoré sa škrtnutím niektorej svojej číslice 13-násobne zmenšia.

C-I-1

- Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) nenulových čísel takých, že súčin ľubovoľných dvoch z nich dáva to tretie číslo.
- Feri napísal na tabuľu dve prirodzené čísla. Potom ich sčítal, vynásobil, a odčítal menšie od väčšieho. Súčet týchto troch výsledkov je 36. Aké čísla mohol Feri napísať na tabuľu? Nájdite všetky možnosti.

C-I-2

- Dokážte, že ak sú a a b nesúdeliteľné prirodzené čísla, tak pre ľubovoľné prirodzené číslo c platí, že $a \mid c$ práve vtedy, keď $a \mid bc$.
- Dokážte, že ak sú a a b prirodzené čísla, tak pre ľubovoľné prirodzené číslo c platí, že $a \mid b$ práve vtedy, keď $a \mid b + ca$.
- Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $3n + 2$ deliteľné 7.
- Dokážte, že číslo $3n - 5$ je deliteľné 7 práve vtedy, keď je číslo $2n - 1$ deliteľné 7.
- Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $7n + 2$ deliteľné číslom 33.

C-I-3

- Je daný trojuholník ABC. Označme K stred strany AB. Dokážte, že pre ľubovoľný bod X na ťažnici KC je obsah trojuholníkov AXC a BXC rovnaký.
- Je daný trojuholník ABC. Označme A_1 a B_1 po rade stredy strán BC a AC. Nech T je priesečník ťažníc AA_1 a BB_1 (tzv. ťažisko trojuholníka ABC). Využite tvrdenie z predchádzajúcej úlohy na to, aby ste dokázali, že trojuholníky ABT, ACT a BCT majú rovnaký obsah. Dokážte tiež, že bod T rozdeľuje ťažnice v pomere $2:1$.
- Je daný trojuholník ABC. Dokážte, že všetky tri jeho ťažnice sa pretínajú v jednom bode.
- Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky $1\,\mathrm{cm}$. Nech K, L, M, N sú po rade stredy strán AB, BC, CD, DA daného štvorca. Úsečky AL, BM, CN, DK sa vnútri štvorca pretínajú v štyroch bodoch, ktoré vytvárajú štvoruholník $PQRS$. Dokážte, že $PQRS$ je štvorec a vypočítajte jeho obsah.

C-I-4

- V skupine ôsmich žiakov má každý aspoň dvoch kamarátov. Je ich možné rozdeliť na dve skupiny po štyroch tak, že každý žiak má vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta?
- V triede s $2k$ žiakmi sú každí dvaja buď priatelia alebo nepriatelia ($k \geq 2$). Dokážte, že ak má každý najviac jedného nepriateľa, tak je možné týchto žiakov rozdeliť na dve skupiny po k žiakov tak, že žiadni dvaja nepriatelia nie sú v jednej skupine.

- V triede s $2k$ žiakmi sú každí dvaja buď priatelia alebo nepriatelia ($k \geq 2$). Dokážte, že ak má každý najviac dvoch nepriateľov, tak je možné týchto žiakov rozdeliť na dve skupiny po k žiakov tak, že každý má vo svojej skupine najviac jedného nepriateľa. Je to vždy možné urobiť aj tak, že žiadni dvaja nepriatelia nie sú v jednej skupine?

C-I-5

- Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a a b platí rovnosť

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b].$$

- Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a a b platí nerovnosť

$$[a, b] + (a, b) \geq a\ + b.$$

  Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastáva rovnosť.

C-I-6

- Dokážte, že stredné priečky (spojnice stredov jednotlivých strán) rozdeľujú ľubovoľný trojuholník na štyri zhodné trojuholníky.
- Je daný trojuholník ABC. Nájdite také body $K \in AC$ a $L \in BC$, pre ktoré platí, že $KL \parallel AB$ a úsečka KL rozdeľuje trojuholník ABC na dve časti s rovnakými obsahmi.
- Sú dané dve úsečky s dĺžkami x a y. Zostrojte úsečku, ktorej dĺžka je

  a) $\dfrac{x+y}{2}$;

  b) $\sqrt{x^2+y^2}$;

  c) $\sqrt{x \cdot y}$.

Vydanie publikácie podporili:

Agentúra na podporu výskumu a vývoja
ako projekt
LPP-0057-09 *Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží*

Slovenská komisia Matematickej olympiády

autori:	Róbert Hajduk, František Kardoš, Stanislav Krajči, Roman Soták
názov:	**Návodné úlohy k domácemu kolu Matematickej olympiády kategórií A, B a C v školskom roku 2010/2011**
vydavatelia:	Krajská komisia Matematickej olympiády v Košiciach Ústav matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach Združenie STROM Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
adresa:	Jesenná 5, 041 54 Košice
www:	http://umv.science.upjs.sk/mo/
rok vydania:	2010
rozsah:	12 strán
verzia:	zo 17. 9. 2010