Krajská komisia Matematickej olympiády v Košiciach

Ústav matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach
Združenie STROM
Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Návodné úlohy
k úlohám domáceho kola
Matematickej olympiády
kategórií A, B a C
v školskom roku 2011/2012

Košice 2011

A-I-1

- Zistite súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré vzniknú z cifier 0, 1, $\dots$, 9, pričom každá z nich je použitá práve raz.
- Zistite súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré vzniknú z cifier 1, $\dots$, 9, pričom každá z nich je použitá práve raz.
- Dokážte, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}^+$ a $a, b \in \mathbb{Z}$ platí:

$$(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n.$$

- Dokážte, že ak pre prirodzené čísla a, b, n platí $a \bmod n = b \bmod n$, tak pre ľubovoľné prirodzené číslo c platí $c \cdot a \bmod n = c \cdot b \bmod (c \cdot n)$. Platí aj opačná implikácia?
- Zistite zvyšok čísla $10!$ po delení sedemdesiatimi siedmimi.

A-I-2

- Majme dve skupiny ľudí.
  a) Ukážte, že ak každý človek z prvej skupiny pozná práve jedného človeka z druhej skupiny, v druhej skupine je ich aspoň toľko ako v prvej.
  b) Ukážte, že ak navyše každý človek z druhej skupiny pozná práve jedného človeka z prvej skupiny, v oboch skupinách je ich rovnako.
- Ukážte, že na stretnutí zo zadania z úlohy môžu byť práve štyria ľudia.

A-I-3

- Vyjadrite $|PS|$, $|PT|$, $|PV|$ pomocou výšky na základňu a uhlu pri nej.
- Nech A, B, C sú tri rôzne body na tej istej polpriamke so začiatočným bodom P.
  a) Dokážte, že B je vnútorným bodom úsečky AC, práve keď

  $$(|PC| - |PB|)(|PB| - |PA|) > 0.$$

  b) Dokážte, že B je stredom úsečky AC práve vtedy, keď

  $$2|PB| = |PA| + |PC|.$$

- Dokážte, že os uhla trojuholníka delí protiľahlú stranu v pomere veľkostí priľahlých strán.
- Dokážte, že v nerovnoramennom trojuholníku leží vždy os uhla medzi príslušnou ťažnicou a výškou.

A-I-4

- Dokážte, že ak pre rôzne prvočísla p a q a celé čísla x a y platí, že p delí $xp + yq$, tak p delí y.
- Dokážte, že ak a delí kladné číslo b, tak $a \leq b$.

A-I-5

- Dokážte, že v situácii zo zadania sú trojuholníky ACL a BCK rovnostranné.
- Dokážte, že v situácii zo zadania je útvar $KCLM$, kde M je priesečník kružnice k_1 s osou úsečky AB, rovnobežník.
- Sú dané dva body X a Y, priamka p a veľkosť uhol α. Nech priamka q vznikne otočením priamky p okolo bodu X o uhol α v smere hodinových ručičiek a priamka r otočením priamky p okolo bodu Y o uhol α v smere hodinových ručičiek. Dokážte, že priamky q a r sú rovnobežné.

A-I-6

- Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí
$$(a+b)^2 \geq 4ab.$$
Kedy nastáva rovnosť?
- Nájdite najväčšiu hodnotu výrazu $(a-x)(b-y)(cx+dy)$, kde a, b, c, d sú kladné reálne konštanty a pre reálne premenné x a y platí $x < a$, $y < b$ a $cx + dy > 0$.
- Nájdite najmenšiu hodnotu k tak, aby pre ľubovoľné kladné reálne číslo a platila nerovnosť
$$a + 1 + \frac{1}{a} \geq ka.$$

B-I-1

- Dokážte, že ak $a \equiv b \bmod n$, tak $ka \equiv kb \bmod n$.
- Majme desaťciferné prirodzené číslo deliteľnými jedenástimi, v ktorom sa žiadna cifra neopakuje. Označme x, resp. y súčet jeho cifier na nepárnych, resp. párnych miestach. Dokážte, že jedno z čísel x a y je 17 a druhé 28.

B-I-2

- Dokážte AG-nerovnosť pre dve čísla: Ak $x, y \in \mathbb{R}^+$, tak

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}.$$

  Zistite tiež, kedy v nej nastáva rovnosť.

B-I-3

- V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$4\lfloor x \rfloor = 3x.$$

- V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\lfloor 3x - 5 \rfloor = 5x - 8.$$

- V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 7\lfloor x \rfloor + 2y &= 117{,}4 \\ 5x + 2\lfloor y \rfloor &= 91{,}9 \end{aligned}$$

B-I-4

- Dané sú dve rôznobežky x, y a bod Z. Zostrojte úsečku XY so stredom Z tak, aby platilo $X \in x$ a $Y \in y$.

B-I-5

- V kontexte tejto úlohy dokážte, že po odchode klebetníka budú aspoň dve jeho informátorky v rôznych častiach siete (a teda spojenie medzi nimi sa preruší).
- Majme dve skupiny ľudí. Nech a a b sú kladné prirodzené čísla také, že každý človek z prvej skupiny pozná práve a ľudí z druhej skupiny a každý človek z prvej skupiny pozná práve b ľudí z prvej skupiny. Dokážte, že počty ľudí v oboch skupinách sú v pomere $a : b$.

B-I-6

- Ako by sa zmenil výsledok úlohy, keby sa v nej roly Anny a Borisa vymenili?
- Dokážte, že hľadaný počet percent sa nezmení, ak sa obmedzíme len na také hry, keď Anna ťahala kartičky presne v poradí 1, 2, 3, 4, 5.

C-I-1

- Dokážte, že zvyšok po delení polynómu $p(x)$ polynómom $x - k$ je $p(k)$.
- Určte čísla a, b, c tak aby boli riešením rovnice

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

C-I-2

- Dokážte, že ak sú dĺžky strán trojuholníka celé čísla a obvod je párny, aj dĺžky úsekov, na ktoré delia strany body dotyku vpísanej kružnice, sú celé čísla.
- a) Dokážte, že ak sú a, b, c dĺžky strán trojuholníka, tak existujú kladné čísla x, y, z také, že $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

  b) Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z existuje trojuholník so stranami $y+z$, $z + x$, $x + y$.

C-I-3

- Nech a a b sú kladné prirodzené čísla a p je prvočíslo. Nech x je najväčšie také prirodzené číslo, že p^x delí a, a y je najväčšie také prirodzené číslo, že p^y delí b. Potom platí:

  a) Najväčšie také prirodzené číslo z, že p^z delí (a, b), je $\min\{x, y\}$.

  b) Najväčšie také prirodzené číslo z, že p^z delí $[a, b]$, je $\max\{x, y\}$.

C-I-4

- Reálne čísla a, b vyhovujú rovnici $ab = k$, kde $k \in \mathbb{R}$. Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2$?
- Reálne čísla a, b, c vyhovujú rovnici $ab + bc + ca = 27$. Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2$?

C-I-5

- Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b platí

$$2b^3 - 3ab^2 + a^3 \geq 0.$$

  Zistite, kedy nastane rovnosť.

C-I-6

- Dvaja hráči striedavo ukladajú na štvorcový stôl so stranou 1 meter jednoeurové mince (a to tak, že každá leží na stole jednou svojou okrúhlou stenou). Prehráva hráč, ktorý už na stôl nemôže umiestniť ďalšiu mincu. Ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu? Ako sa zmení riešenie, ak pôjde o okrúhly alebo obdĺžnikový stôl, prípadne o päťeurové bankovky?
- Dvaja hráči striedavo berú z kopy, kde bolo na začiatku hry sto zápaliek, (každý podľa vlastnej voľby) 1, 2, 3, . . . , 10 zápaliek. Prehráva hráč, ktorý už nemôže zobrať žiadnu zápalku, lebo kopa sa vyprázdnila. Ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu?

Vydanie publikácie podporili:

Agentúra na podporu výskumu a vývoja

Nadácia Tatra Banky

Slovenská komisia Matematickej olympiády

autori:	Róbert Hajduk, František Kardoš, Stanislav Krajči
názov:	**Návodné úlohy k úlohám domáceho kola Matematickej olympiády kategórií A, B a C v školskom roku 2011/2012**
vydavatelia:	Krajská komisia Matematickej olympiády v Košiciach Ústav matematických vied Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach Združenie STROM Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
adresa:	Jesenná 5, 041 54 Košice
www:	http://umv.science.upjs.sk/mo/
rok vydania:	2011
rozsah:	8 strán
verzia:	20. 9. 2011