

11. Lineární zobrazení

V celé přednášce pojednáváme o vektorových prostorech nad jedním a týmž polem P .

Definice. Buďte U, V vektorové prostory. Zobrazení $f : U \rightarrow V$ se nazývá *lineární*, přesněji *lineární nad polem P* , jestliže platí

$$(i) \quad f(a + b) = f(a) + f(b) \quad (\text{aditivita})$$

$$(ii) \quad f(ra) = rf(a) \quad (\text{homogenita})$$

pro každé dva vektory $a, b \in U$ a každý skalár $r \in P$. Jiný název pro lineární zobrazení je *homomorfismus vektorových prostorů*.

Příklad. (1) Identické zobrazení $\text{id} : U \rightarrow U$, $\text{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0 : U \rightarrow U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c : U \rightarrow U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie*. Všimněte si, že (1) resp. (2) jsou speciální případy pro $c = 1$ resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbf{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad \mathbf{R} . Toto zobrazení *není* lineární zobrazení nad \mathbf{C} . Ověřte.

(5) Zobrazení $\text{re} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$, $z \mapsto \text{re } z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad \mathbf{R} .

(6) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U : U \rightarrow V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

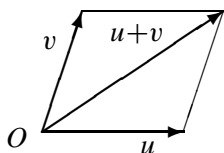
Cvičení. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je lineární nad \mathbf{R} právě když existuje skalár $c \in \mathbf{R}$ takový, že $f(a) = ca$.

Návod: Položte $c = f(1)$.

Uveďme dva příklady významných geometrických zobrazení, která jsou lineární co se týče účinku na vektory.

1. *Otáčení.* Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o též úhel α , nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha : E^2 \rightarrow E^2$.

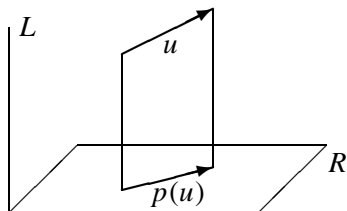
Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c -násobek vektoru na c -násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu



se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \rightarrow E^3$.

2. *Rovnoběžné promítání.* Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \rightarrow R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dot{+} R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.



Promítání $p : E^3 \rightarrow R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \rightarrow V$ je homomorfismem abelovských grup $(U, +, 0, -) \rightarrow (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$.

Tvrzení. *Bud' $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ homomorfismy. Pak je $g \circ f : U \rightarrow W$ také homomorfismus.*

Důkaz. Ověříme aditivitu zobrazení $g \circ f$. Pro libovolná $a, b \in U$ máme $(g \circ f)(a + b) = g(f(a + b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)$. Homogenita podobně.

Jádro a obraz

Definice. Bud' $f : U \rightarrow V$ homomorfismus. Označme

$$\text{Ker } f = \{u \in U \mid f(u) = 0\},$$

$$\text{Im } f = fU = \{f(u) \mid u \in U\}.$$

$\text{Ker } f$ se nazývá *jádro* a $\text{Im } f$ se nazývá *obraz* homomorfismu f .

Tvrzení. *Bud' $f : U \rightarrow V$ homomorfismus. Pak*

- (1) $\text{Ker } f$ je podprostor v U .
- (2) $\text{Im } f$ je podprostor ve V .

Důkaz. (1) (i) $0 \in \text{Ker } f$, protože $f(0) = 0$. (ii) Necht' $a, b \in \text{Ker } f$. Pak $a + b \in \text{Ker } f$, protože $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$. (iii) Necht' $a \in \text{Ker } f, r \in P$. Pak $ra \in \text{Ker } f$ (cvičení).

(2) Cvičení.

Cvičení. (1) Pro homomorfismus re z příkladu (5) platí:

$$\text{Im } re = \mathbf{R}, \quad \text{Ker } re = \mathbf{R}i = \{ri \mid r \in \mathbf{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p : E^3 \rightarrow E^2$ je podprostor $\text{Ker } p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\text{Im } p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha : E^2 \rightarrow E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\text{Im } \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\text{Ker } \phi_\alpha$ je nulový podprostor.

Tvrzení. *Bud' $f : U \rightarrow V$ homomorfismus. Pak*

(1) *f je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker } f = 0$.*

(2) *f je surjektivní právě tehdy, když $\text{Im } f = V$.*

Důkaz. (1) Bud' f injektivní, bud' u libovolný prvek z $\text{Ker } f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivnosti $u = 0$.

Naopak, nechť $\text{Ker } f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \text{Ker } f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé.

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak se číslo $\dim \text{Ker } f$ nazývá *defekt* a číslo $\dim \text{Im } f$ *hodnota* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení. *Bud' $f : U \rightarrow V$ homomorfismus mezi konečněrozměrnými prostory U, V . Pak*

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim U.$$

Důkaz. Označme $\dim U = n$, $\dim \text{Ker } f = m$ a $\dim \text{Im } f = p$. Zvolme bázi u_1, \dots, u_m v $\text{Ker } f$, doplníme ji do báze u_{m+1}, \dots, u_n v U . Ověříme, že vektory $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ tvoří bázi v $\text{Im } f$.

Zaprvé, $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ generují $\text{Im } f$. Víme totiž, že u_1, \dots, u_n generují U , načež $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generují $fU = \text{Im } f$ (ověřte podrobně), ale $f(u_1) = 0, \dots, f(u_m) = 0$, takže je můžeme z generující množiny bez následků vyškrtnout.

Zadruhé, $f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ jsou lineárně nezávislé. Vskutku, uvažujme o nulové lineární kombinaci $x_{m+1}f(u_{m+1}) + \dots + x_n f(u_n) = 0$, čili, $f(x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n) = 0$, tj.

$$x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n \in \text{Ker } f,$$

načež

$$x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$$

pro vhodné koeficienty x_1, \dots, x_m . Ale zúčastněné vektory $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$ jsou nezávislé, a proto jsou všechny koeficienty nulové, zejména x_{m+1}, \dots, x_n jsou nuly, což se mělo dokázat.

Našli jsme bázi v $\text{Im } f$ čítající $n - m$ vektorů, takže $\dim \text{Im } f = n - m = \dim U - \dim \text{Ker } f$. Důkaz je hotov.

Izomorfismy

Podobně jako u jiných algebraických struktur, invertibilní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice. *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.

Tvrzení. *Bud' $f : U \rightarrow V$ izomorfismus. Pak je*

$$f^{-1} : V \rightarrow U$$

též izomorfismus.

Důkaz. Zobrazení f^{-1} je bijektivní. Dokažme, že je lineární. Ověřme aditivitu, tj. rovnost $f^{-1}(a + b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$. Počítejme:

$$f(f^{-1}(a + b)) = a + b = f(f^{-1}(a)) + f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)).$$

Požadovaná rovnost plyne z injektivnosti zobrazení f . Homogenita podobně.

Definice. Vektorové prostory U, V , mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají *izomorfní*. Zapisujeme $U \cong V$.

Tvrzení. (1) Reflexivita: $U \cong U$.

(2) Symetrie: *je-li* $U \cong V$, *pak* $V \cong U$.

(3) Tranzitivita: *je-li* $U \cong V$, $V \cong W$, *pak* $U \cong W$.

Důkaz. (1) $\text{id} : U \rightarrow U$ je izomorfismus. (2) Viz předchozí tvrzení. (3) Kompozice bijekcí je bijekce, kompozice homomorfismů je homomorfismus.

Cvičení. (1) Homotetie $f_c : a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.

(2) Homomorfismus $z \mapsto z^*$ z příkladu (4) je izomorfismus $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}$.

(3) Homomorfismus re z příkladu (5) není izomorfismus (není injektivní).

(4) Otáčení je vždy izomorfismus. Rovnoběžné promítání $E^3 \rightarrow E^2$ není nikdy izomorfismus.

Tvrzení. *Bud'te* $U \cong V$ *dva izomorfní konečněrozměrné vektorové prostory. Pak* $\dim U = \dim V$.

Důkaz. *Bud'* $f : U \rightarrow V$ *izomorfismus. Pak* $\dim \text{Ker } f = 0$, $\dim \text{Im } f = \dim V$, a proto $\dim U = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V$.

Cvičení. *Bud'* $f : U \rightarrow V$ *izomorfismus konečněrozměrných prostorů. Je-li* $u_1, \dots, u_n \in U$ *báze* *prostoru* U , *pak* $f(u_1), \dots, f(u_n) \in V$ *je báze* *prostoru* V . *Dokažte. Totéž pro množiny generátorů resp. množiny lineárně nezávislých vektorů.*

Izomorfní prostory se z hlediska lineární algebry prakticky neliší a není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor U je izomorfní s některým prostorem P^n .

Tvrzení. (1) *Libovolný vektorový prostor* U *nad polem* P *je izomorfní s prostorem* $P^{\dim U}$.

(2) *Konečněrozměrné vektorové prostory* U, V *jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Důkaz. (1) Nechť $\dim U = n$. Zvolme libovolně bázi e_1, \dots, e_n v U . Pak má libovolný vektor $u \in U$ souřadnice x_1, \dots, x_n , jednoznačně určené vztahem $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Zavedme zobrazení $U \rightarrow P^n$ předpisem $u \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. O něm je známo, že je lineární, protože při sčítání vektorů se jejich souřadnice sčítají a při násobení skalárem se násobí týmž skalárem.

(2) Implikace „ \Rightarrow “ již byla dokázána. Implikace „ \Leftarrow “: Je-li $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$.

Vidíme, že počítání s vektory v souřadnicích je vlastně výpočtem v izomorfním prostoru $U \cong P^n$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě souřadnic, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a P^n ztotožňovat.

Každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze a tyto obrazy lze volit libovolně:

Tvrzení. Zvolme bázi u_1, \dots, u_n v konečněrozměrném prostoru U . Pak ke každé n -tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.

Důkaz. Zvolme n -tici vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$. Obecný prvek $u \in U$ je tvaru $x_1u_1 + \dots + x_nu_n$. Položme $f(u) = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$. Ověřte samostatně, že (a) zobrazení $f : U \rightarrow V$ je lineární a $f(u_i) = v_i$; (b) je-li $f' : U \rightarrow V$ lineární zobrazení takové, že $f(u_i) = v_i$, pak $f' = f$.

Přitom lze snadno rozeznat injektivní a surjektivní homomorfismy:

Tvrzení. Bud' $f : U \rightarrow V$ zobrazení z předchozího tvrzení

- (1) f je injektivní právě tehdy, když jsou vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ nezávislé;
- (2) f je surjektivní právě tehdy, když vektory v_1, \dots, v_n generují V .

Důkaz. Cvičení.

Důsledek. Zobrazení f z předchozího tvrzení je izomorfismus právě tehdy, když v_1, \dots, v_n je báze.

Přímý součet vektorových prostorů

Již dříve jsme zavedli přímé součty podprostorů. Nyní uvedeme konstrukci přímého součtu libovolných prostorů, pokud mají společné pole skalárů.

Definice. Bud' U_1, \dots, U_n libovolné vektorové prostory nad polem P . Na kartézském součinu $U_1 \times \dots \times U_n$ zavedme strukturu vektorového prostoru předpisem

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$

$$r(u_1, \dots, u_n) = (ru_1, \dots, ru_n)$$

pro libovolné prvky $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in U \times V$.

Vektorový prostor $U_1 \times \dots \times U_n$ s touto algebraickou strukturou se značí $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ a nazývá se *přímý součet* vektorových prostorů U_1, \dots, U_n .

Cvičení. Ověřte, že $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ skutečně splňuje všechny axiomy vektorového prostoru.

Tvrzení. Jsou-li U_1, \dots, U_n konečněrozměrné vektorové prostory, pak platí

$$\dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n.$$

Důkaz. Je-li $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$ báze prostoru U_i , pak je

$$(e_1^1, 0, \dots, 0), \dots, (e_{m_1}^1, 0, \dots, 0), \dots, (e_1^n, 0, \dots, 0), \dots, (e_{m_n}^n, 0, \dots, 0)$$

báze prostoru $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ (cvičení).

Jsou-li U_1, \dots, U_n podprostory nějakého vektorového prostoru U , pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 + \dots + U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor v U , kdežto druhý není. Nicméně, oba přímé součty jsou izomorfní. Plyne to z následujícího tvrzení.

Tvrzení. *Bud'te U_1, \dots, U_n podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U . Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

- (1) *součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý;*
- (2) *zobrazení $p : U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_1 + \dots + U_n$,*

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n,$$

je izomorfismus prostoru $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ na prostor $U_1 + \dots + U_n$.

- (3) *$\dim U_1 + \dots + \dim U_n = \dim(U_1 + \dots + U_n)$.*

Důkaz.

(1) \Rightarrow (2). Zobrazení p je lineární (cvičení). Dále, ke každému $u \in U_1 + \dots + U_n$ existuje rozklad $u = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Je-li součet $U_1 + \dots + U_n$ přímý, potom je rozklad $u = u_1 + \dots + u_n$ jediný a $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ je zobrazení $U_1 + \dots + U_n \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, inverzní k p . Potom je p bijektivní, a tedy izomorfismus.

(2) \Rightarrow (3). Je-li $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, pak $\dim(U_1 + \dots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$.

(3) \Rightarrow (2). Nechť $\dim U_1 + \dots + \dim U_n = \dim(U_1 + \dots + U_n)$. Homomorfismus p je surjektivní (cvičení). Máme pak $\dim \text{Ker } p = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) - \dim \text{Im } p = \dim U_1 + \dots + \dim U_n - \dim(U_1 + \dots + U_n) = 0$. Tudíž, p je injektivní, a proto izomorfismus, načež je náš součet přímý podle předchozího tvrzení.

(2) \Rightarrow (1). Cvičení.

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího tvrzení je opravdu lineární.

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ máme zobrazení $\pi_i : U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_i$, zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$. Nazývá se i -tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ máme též zobrazení $\iota_i : U_i \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$, kde u stojí na i -tém místě. Nazývá se vložení i -tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočítejte $\pi_i \circ \iota_j$.