

Posudok oponenta na dizertačnú prácu Mgr. Leszeka Szału:

Recurrence in systems with randomly perturbed trajectories.

V oblasti diskretných dynamických systémov je motiváciou ich ďalšieho štúdia perspektíva aplikácií pri modelovaní reálnych situácií. V tejto súvislosti je prirodzené uvažovať vplyv náhodných perturbácií a skúmať vlastnosti, ktoré boli odvodené pre systémy nenáhodné. V poslednom období sa viacerí autori venovali aj otázkam neautonómnych systémov v súvislosti s problematikou chaotickosti systému. Predložená práca je súborom troch prác, ktoré sa venujú vlastnostiam rekurencie v autonómnych a neautonómnych systémoch s náhodnými perturbáciami, ako aj problematike chaotickosti, resp. nechaotickosti. Dve z prác ([1] a [2]) sú publikované v *International Journal of Bifurcation and Chaos*, tretia ([3]) je zaslaná do časopisu. Okrem toho práca obsahuje úvod, kde sú objasnené základné pojmy, východiskový stav problematiky a hlavné dosiahnuté výsledky.

Autonómny dynamický systém sa rozumie dvojica (X, f) , kde X je kompaktný metrický priestor a $f : X \rightarrow X$ je spojité zobrazenie. Neautonómny systém sa rozumie dvojica $(X, f_{0,\infty})$, kde $f_{0,\infty}$ je postupnosť spojitých zobrazení X do seba. V oboch prípadoch sa uvažujú systémy s aditívnymi náhodnými perturbáciami. Autor vychádzal z prác [4] a [5], kde sa študoval takýto typ perturbácií a venoval sa otázkam rekurencie aj pre neautonómne systémy, pričom vychádzal z nových výsledkov o neautonómnych systémoch, napr. Cánovas [6], Štefánková [7].

V práci [1] autor zaviedol pojem (f, δ) -rekurencie pre (f, δ) -proces. (f, δ) -proces je daný vzťahom $X_{n+1} = f(X_n) + \xi_n$, kde $X_0 = x_0$, f je vhodné spojité rozšírenie spojitej funkcie z $[0, 1]$ do seba a ξ_n sú nezávislé rovnomerne rozdelené náhodné premenné s nosičom v $[-\delta, \delta]$, $\delta > 0$. Bod x je (f, δ) -rekurentný, ak pre každé okolie U bodu x a každé $\delta' < \delta$ platí $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{X_k \in U\}) = 1$ pre ľubovoľný (f, δ) -proces s počiatočným bodom x . Autor ukázal, že ak množina periód funkcie f je $\{2^n; n = 0, 1, \dots\}$ (tzv. funkcia typu 2^∞) a f nemá prítahujúce periodické body väčšieho rádu ako 2^N pre nejaké n a má nekonečnú ω limitnú množinu, tak každý bod tejto množiny je (f, δ) -rekurentný pre dosť malé δ .

V práci [2] je problematika z práce [1] rozšírená pre spojité zobrazenia f m -rozmerného intervalu do seba a pre neautonómne systémy s náhodnými perturbáciami. Autor zaviedol pojem rovnomernej (f, δ) -rekurencie analogicky ako v deterministickom prípade. Na rozdiel od výsledku v deterministickom prípade, (f, δ) -rekurencia a rovnomerná (f, δ) -rekurencia nie sú ekvivalentné.

V práci [3] sa uvažuje postupnosť $f_{0,\infty}$ generujúca neautonómny dynamický systém, ktorá konverguje rovnomerne k funkcii f . Autor ukázal, že každý prítahujúci pevný bod funkcie f je $f_{k,\infty}$ -rekurentný pre dosť veľké k a nejaké $\delta > 0$. Symbolom $f_{k,\infty}$ sa tu označuje postupnosť získaná z $f_{0,\infty}$ vynechaním prvých k členov. Ďalej v práci vhodne obmenil definíciu nechaotickosti vzhľadom k malým náhodným perturbáciám z [5] a sformuloval podmienku, aby takýto neautonómny dynamický systém bol nechaotický vzhľadom k malým náhodným perturbáciám.


Súbor prác je uceleným výstupom výskumu v aktuálnej problematike diskretných dynamických systémov. Podľa môjho názoru sa jedná o zaujímavé a kvalitné práce. Autor nadviazal na štúdium problematiky procesov s náhodnými perturbáciami z prác [4] a [5], zaviedol pojmy rekurencie a rovnomernej rekurencie vzhľadom k takýmto systémom a k systémom

neautonómny a získal vzťahy medzi týmito vlastnosťami, ako aj triedy (f, δ) rekurentných (resp. $(f_{0,\infty}, \delta)$ -rekurentných) bodov. Aj keď niektoré výsledky môžu pôsobiť z hľadiska všeobecnej teórie diskretných dynamických systémov špeciálne, z hľadiska problematiky systémov s náhodnými perturbáciami a neautonómnych systémov obsahujú nové poznatky a prispievajú k aktuálnemu výskumu v tejto oblasti. Autor preukázal schopnosť samostatne vedecky tvoriť, používal metódy diskretných dynamických systémov ako aj prístupy teórie pravdepodobnosti. Na základe uvedeného doporučujem Mgr. Leszekovi Szałowi udeliť titul Ph. D.

Referencie:

- [1] L. Szała, Recurrence in systems with random perturbations. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 23(6), 2013
- [2] L. Szała Recurrence in systems with randomly perturbed trajectories on the n dimensional cube. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 24(11), 2014.
- [3] L. Szała: Chaotic behaviour of uniformly convergent nonautonomous systems with randomly perturbed trajectories. Zasláné do J. Differ. Equ. Appl.
- [4] K. Janková, J. Smítal, Maps with random perturbations are generically not chaotic. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 5(1995), 1375-1378.
- [5] K. Janková, Chaos in dynamical systems with randomly perturbed trajectories. Proc. European Conf. Iteration Theory, Lisbon 1991, World Scientific, Singapore, 146-156.
- [6] S. Cánovas, Li-Yorke chaos in a class of nonautonomous discrete systems. J. Differ. Equ. Appl. 17(2011), 479-486.
- [7] M. Štefánková, Inheriting of chaos in nonautonomous dynamical systems, preprint (2013).

V Bratislave, 14.11.2014


doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.