Posudok na dizertačnú prácu

Michaela Čiklová:

Minimality, sensitivity and topological entropy in discrete dynamics

1. Úvod

Dizertačná práca na jednej strane skúma dynamiku intervalových zobrazení, ktorých graf je súvislá G_δ množina (najmä súvis topologickej entropie s periodickými bodmi a minimálne množiny) a na druhej strane konštruuje kontrapríklady k dvom hypotézam Akina a Kolyadu o Li-Yorkovej senzitívnosti. K prvej téme autorku inšpirovali práce Szucu, ktorý v r. 2003 dokázal, že Šarkovského veta platí pre uvedený druh zobrazení, popudom k druhej téme bola práca Akina a Kolyadu z r. 2003, v ktorej boli sformulované niektoré hypotézy o Li-Yorkovej senzitívnosti.

2. O obsahu dizertačnej práce

Dizertačná práca je zjednotením troch clánkov opatrených spoločným komentárom. Ide o články:

[1] M. Čiklová: *Dynamical systems generated by functions with connected G_δ graphs*, Real Analysis Exch. 30(2), 2004/05, 617 – 638.

Autorka zovšeobecňuje niektoré výsledky z dynamiky spojitých zobrazení intervalu na také intervalové zobrazenia, ktorých graf je súvislá množina typu G_δ. Ukazuje, že ω-limitné množiny a rekurentné body sa nesprávajú tak ako v spojitom prípade. Študuje ďalej periodické body a ukazuje, že pre ne platia viaceré tvrdenia známe zo spojitého prípadu. Snaží sa preniesť teóriu topologickej entropie na ľubovoľné zobrazenia metrického kompaktu do seba. Hlavným výsledkom článku je prenesenie tvrdenia, že spojitá funkcia intervalu má kladnú entropiu vtedy a len vtedy keď má periodický bod, ktorého perióda nie je mocnina dvojky, aj na funkcie, ktorých graf je súvislá množina typu G_δ.

[2] M. Čiklová: *Minimal and ω-minimal sets of functions with connected G_δ graphs*, Real Analysis Exch. 32(2), 2006/07, 397 – 408.

Minimálna množina je podľa definície množina, ktorá je neprázdna, uzavretá, invariantná a nemá vlastnú podmnožinu s týmito vlastnosťami. V spojitom prípade je množina minimálna práve vtedy, keď každý bod tej množiny má ω-limitnú množinu rovnajúcu sa tej množine. Autorka ukazuje, že pre intervalové zobrazenia, ktorých graf je súvislá množina typu G_δ takáto charakterizácia neplatí. Zavádza preto pojem ω-minimálnej množiny a ukazuje, že minimálna množina nemusí byť ω-minimálna a obrátene. Hlavným výsledkom je tvrdenie, že pri dodatočnom predpoklade, že funkcia má len periodické body, ktorých periódy sú mocniny dvojky, je neprázdna množina ω-minimálna práve vtedy, keď je uzavretá, invariantná, každý jej bod je rekurentný a nemá vlastnú podmnožinu s týmito vlastnosťami.

[3] M. Čiklová: *Li-Yorke sensitive minimal maps*, Nonlinearity 19(2006), 517 – 529.

V súčine Cantorovej množiny a kružnice autorka konštruuje dva trojuholníkové minimálne systémy bez slabo premiešavajúcich faktorov tak, že jeden z nich je Li-Yorke senzitívny a druhý je priestorovo-časovo ("spatio-temporally") chaotický ale nie Li-Yorke senzitívny. Tým vyvrátila dve hypotézy Akina a Kolyadu. Autorkina konštrukcia je netriviálnou modifikáciou konštrukcie, ktorú pôvodne použili Forti, Paganoni a Smítal pri hľadaní patologických trojuholníkových zobrazení štvorca.

3. Hodnotenie kvality dizertačnej práce

Dizertačná práca si od autorky vyžiadala slušnú znalosť teórie diskrétnych dynamických systémov, najmä metód kombinatorickej, topologickej a symbolickej dynamiky. Práca prináša nové vedecké výsledky a prispieva tak k lepšiemu pochopeniu teórie.

Z troch článkov je jednoznačne po odbornej ale aj po formálnej stránke najlepší tretí článok (o senzitívnosti). Je aj technicky mimoriadne náročný. Považujem ho za prvotriedny. Ďalšie dva články sa venujú triede systémov, ktoré sú síce zaujímavé, ale momentálne nie sú v centre pozornosti. Zdá sa, že v tejto problematike zostane neprekonateľným vrcholom Šarkovského veta. Koniec koncov, trieda bola asi vymyslená tak, aby prešla práve Šarkovského veta, takže sa nemožno čudovať, že pokiaľ sa nezaujímame práve o periodické body, tak typickými pre túto triedu sú negatívne výsledky. Veci tu nefungujú tak ako u spojitých zobrazení, takže je vlastne zaujímavé, že autorka predsa len našla ďalšie dôležité tvrdenia, ktoré sa zo spojitého prípadu prenášajú na tieto funkcie.

K dizertačnej práci mám samozrejme niektoré výhrady. Našiel som v nej popri tlačových chybách a nepresnostiach aj jedno miesto, kde vidím odborný problém. Uvediem (len) niektoré pripomienky konkrétne:

K článku [1]:

Keďže v dynamike skúmame iterácie, chýba mi, že ani v článku ani v úvodnom komentári sa nediskutuje o probléme, či je trieda $\mathcal{J}$ uzavretá vzhľadom na skladanie zobrazení alebo aspoň vzhľadom na iterácie.

Dôkaz Lemy 2.7 je neúplný, funkcia f nie je úplne definovaná (a nie každá funkcia spĺňajúcu uvedenú čiastočnú definíciu má požadovanú vlastnosť).

V dôkaze Lemy 3.2 sa hovorí, že X je kompaktný interval, hoci pred Definíciou 3.1 sa povedalo, že X bude kompaktný metrický priestor.

S čím mám skutočný problém, je Veta 3.18. Tvrdí sa, že variačný princíp platí pre každé zobrazenie $f \in \mathcal{F}$ (teda pre každé zobrazenie $X \to X$). Avšak už na kompaktnom intervale existujú nespojité zobrazenia, ktoré nemajú žiadnu invariantnú pravdepodobnostnú mieru. Teda prvých deväť riadkov dôkazu vo všeobecnosti nefunguje. Navyše aj ku koncu dôkazu sa využíva, že proces zo začiatku dôkazu vedie k invariantnej miere. Mám preto pochybnosti o platnosti vety. Možno by sa niečo zachránilo obmedzením sa len na intervalové zobrazenia triedy $\mathcal{J}$ – pre ne vždy existuje pevný bod a teda aj invariantná miera, ale stále je pochybnosť o tom, či funguje proces výroby invariantnej miery zo začiatku dôkazu. Ďalší nápad je v prípade neexistencie invariantnej miery interpretovať $\sup_\mu h_\mu(f)$ ako nulu. To však rieši problém len ak $h(f) = 0$ a muselo by sa skúmať, či v prípade $h(f) > 0$ aspoň pre zobrazenia z $\mathcal{J}$ už funguje začiatok dôkazu resp. veta platí z nejakých iných dôvodov.

K článku [2]:

V súvislosti s definíciami 1.1 a 1.2 a ekvivalenciou v hlavnej Vete 1.1 sa mi zdá, že by prehľadnosti článku prospelo, keby sa ešte zaviedol pojem silne minimálnej množiny (definícia by bola rovnaká ako Definícia 1.1., len namiesto invariantnosti $f(M) \subset M$ by bola silná invariantnosť $f(M) = M$) a explicitne by sa preskúmali všetky implikácie medzi štyrmi podmienkami – dvoma podmienkami z Vety 1.1 a podmienkami 3. M je minimálna a 4. M je silne minimálna. Väčšina z toho sa ovšem v článku nájde (pozri Lemu 2.2 a Lemu 2.4 a jej dôkaz).

V legende k obrázku 1 by malo byť $f(M) \subsetneq M$.

K článku [3]:

Na str. 518, 9. riadok zdola je slovo 'rigidity' použité v neformálnom zmysle či v zmysle definície rigidnosti?

Na obr. 2 má byť J_{111} namiesto J_{11} (?).

Na str. 523, prvý riadok zhora, má byť $P_0 \times S$ a $P_1 \times S$ (?).

Vzhľadom na to, že autorka dizertačnej práce preukázala schopnosť samostatnej vedeckej práce a dosiahla hodnotné vedecké výsledky, vyslovujem nasledujúci záver.

4. Záver

Odporúčam, aby bol RNDr. Michaele Čiklovej udelený titul "PhD".

Banská Bystrica, 5. 5. 2008

Doc. RNDr. Ľubomír Snoha, DSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40
974 01 Banská Bystrica