Posudok na dizertačnú prácu
Jakub Šotola:
Various approaches to the blowing-up orbits technique

1. Úvod

Dizertačná práca je o topologickej dynamike autonómnych a neautonómnych diskrétnycch dynamických systémov. Hlavné kľúčové slová sú chaos, entropia, minimálnosť.

2. O obsahu dizertačnej práce

Dizertačná práca pozostáva z dvoch publikovaných článkov opatrených spoločným komentárom:

[1] J. Šotola, *Relationship between Li-Yorke chaos and positive topological sequence entropy in nonautonomous dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **38** (2018), no. 10, 5119–5128.

[2] J. Šotola, S. Trofimchuk, *Construction of minimal non-invertible skew-product maps on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 2, 723–732.

V prvom z nich je ukázané, že rovnomerne konvergentný neautonómny systém na intervale, s kladnou sekvenciálnou topologickou entropiou, nemusí byť chaotický v zmysle Li a Yorka. Pritom je známe, že autonómny systém na intervale s kladnou sekvenciálnou topologickou entropiou chaotický v zmysle Li a Yorka byť musí.

V druhom článku sa konštruuje minimálne neivertovateľné zobrazenie na Kleinovej fľaši, čím bola daná kladná odpoveď na otvorený problém.

V oboch prípadoch sa používa technika nafukovania orbít. Odtiaľ pochádza názov dizertačnej práce.

3. Hodnotenie kvality dizertačnej práce

Najskôr uvediem niektoré konkrétne pripomienky, ktoré mám k dizertácii:

V časti "1. Introduction" sa píše, že v oboch článkoch je hlavným výsledkom kontrapríklad vyvracajúci hypotézu. V prípade neinvertovateľného minimálneho zobrazenia na Kleinovej fľaši s tým celkom nesúhlasím – ide skôr o príklad ako o kontrapríklad, lebo práveže hypotéza bola, že na Kleinovej fľaši také zobrazenie existuje.

V článku [1] na str. 5121, ako aj časti "2. Preliminaries", na str. 3, v v definícii sekvenciálnej entropie pre neautonómny systém autor používa zlomok $1/a_n$. Je pravda, že pre "obyčajnú" entropiu, teda ak $a_i = i$, to dáva obvyklú definíciu. Napriek tomu si myslím, že definícia je "filozoficky" nesprávna a mal by v nej byť zlomok $1/n$ (čo pre "obyčajnú" entropiu samozrejme tiež dáva obvyklú definíciu). Okrem iného, v prípade autonómnych systémov sa v definícii sekvenciálnej entropie tiež používa zlomok $1/n$ a nie $1/a_n$, tak to definoval už Goodman. Nevidím teda dôvod meniť to v prípade neautonómneho systému. Otázka: Ak v definícii nahradíme zlomok $1/a_n$ zlomkom $1/n$, ovplyvní to nejako článok [1]? Aký je vzťah medzi oboma definíciami?

V časti "2. Preliminaries", na str. 4 dole, je vzťah $g \circ h^{-1} = h^{-1} \circ f$ správne alebo má byť $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$?

Privítal by som, keby v práci bola krátka kapitola o otvorených problémoch či možnostiach ďalšieho výskumu. Jedine v závere sekcie 4.1, na strane 9 dole, sa jeden netriviálny problém spomína.

Ďalej, v časti "3.1 Historical background" na str. 5 dole (ako aj v práci [1] na str. 5120) je odkaz na diplomovú prácu Šotolovej, kde má byť príklad, že Li-Yorkov chaos pre neautonómne dynamické systémy na intervale neimplikuje kladnú topologickú sekvenciálnu entropiu (snáď dokonca pre rovnomerne konvergentný systém), autor potom ukazuje, že ani obrátená implikácia neplatí. Stojí za zváženie, či ten Šotolovej príklad (alebo aspoň jeho idea) nemal byť v historickom úvode zopakovaný, hlavne ak nie je príliš dlhý.

Práca je napísaná slušnou angličtinou, sem tam mi chýbal člen apod. Ako v každej práci, zopár tlačových chýb sa nájde. Napr. v práci [1], na str. 5126, vo formule (4) (tiež na str. 7) asi má byť K_j^n namiesto K_n^j.

Dizertačná práca predstavuje dva zložité, technicky náročné príklady dynamických systémov, ktoré dávajú odpovede na netriviálne otázky. V prvom z nich sa využíva najmä práca Brucknera a Smítala, v druhom práca Hrica a Jägera. Od autora si dizertácia vyžiadala dobrú znalosť teórie diskrétnych dynamických systémov. Práca prináša nové vedecké výsledky a prispieva tak k lepšiemu pochopeniu teórie. Autor preukázal schopnosť samostatnej vedeckej práce. Hodnotu dizertácie neznižuje ani fakt, že nedávno Boroński dokázal všeobecnejšie tvrdenie: Ak kompaktná varieta dimenzie aspoň dva pripúšťa minimálny homeomorfizmus, tak pripúšťa aj minimálne neinvertovateľné zobrazenie (špeciálne, toto tvrdenie možno aplikovať na Kleinovu fľašu), pozri prácu zo septembra 2018, https://arxiv.org/abs/1809.00835.[1] Koniec koncov, udialo sa tak až tri roky po publikovaní práce [2] a Boroński prácu [2] aj cituje.

Vyslovujem nasledujúci záver.

4. Záver

Odporúčam, aby bol Jakubovi Šotolovi po úspešnej obhajobe udelený titul "PhD".

Banská Bystrica, 2. 11. 2018

Prof. RNDr. Ľubomír Snoha, DSc., DrSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40
974 01 Banská Bystrica

[1] Tým je vyriešená ľahšia implikácia v dávnej oponentovej hypotéze prezentovanej na niekoľkých konferenciách: Varieta dimenzie aspoň dva pripúšťa minimálny homeomorfizmus vtedy a len vtedy, keď pripúšťa minimálne neinvertovateľné zobrazenie.