TEÓRIA ČÍSEL

1. Nájdite niekoľko štvoríc m, n, p, q takých, že p, q sú rôzne prvočísla, m, n - prirodzené čísla a

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p} \text{ je celé číslo}$$

Riešenie: Stačí nájsť také štvorice, aby

$$\frac{mp-1}{q} \text{ aj } \frac{nq-1}{p} \text{ boli celé čísla.}$$

Zvolím p, q, napr. $p = 3$ $q = 5$

Hľadám m, n také, aby

$3m - 1 = 5a$ a $5n - 1 = 3b$

Napr. $m = 2$ $n = 2$

$$\frac{2 \cdot 3 - 1}{5} = 1 \quad a \quad \frac{2 \cdot 5 - 1}{3} = 3 \quad \text{atď.}$$

2. Nech a, b, c sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak a a b sú nesúdeliteľné a a / bc je a / c.

Riešenie: Jednoduché.

$a / bc \Rightarrow \exists k ; \quad bc = ka$

ľavá strana je del. b, aj pravá

musí byť $b \nmid a \Rightarrow b / k \Rightarrow k = bl$

$bc = bla \Rightarrow c = la \Rightarrow a/c.$

Dokázané.

3. Pre celé čísla a, b, c, d platí

$b \mid a+c$; $a \mid b+d$. Dokážte, že $ab \mid ad+bc+cd$

Riešenie: $a+c = bk$

$b+d = al$

$$(a+c)(b+d) = ab + ad + bc + cd = abkl$$

$$\Rightarrow ab \mid ad + bc + cd.$$

4. Určite všetky celé kladné čísla m, n také, že

$n \mid 2m-1$ a $m \mid 2n-1$.

Riešenie: $2m-1 = kn$ $\quad$ $2n-1 = lm$

$2n-1 = lm$

$$k+2 = m(4-kl)$$
$$l+2 = n(4-kl) \Rightarrow \underline{kl < 4} \Rightarrow$$
$$kl = 1, 2, 3$$

rozoberieme tieto prípady:

$\underline{kl = 1} \Rightarrow k = 1, l = 1 \Rightarrow \begin{matrix} 2m-1 = n \\ 2n-1 = m \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3m = 3 \\ \underline{m = 1} \\ 2n-1 = 1 \\ \underline{n = 1} \end{matrix}$

$\underline{kl = 2}$ $\quad$ $\begin{matrix} k+2 = 2m \\ l+2 = 2n \end{matrix}$ $\quad$ obe k i l musia byť párne a to nejde!

$\underline{kl = 3}$ $\quad$ $\begin{matrix} k+2 = m \\ l+2 = n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m = 5, n = 3 \\ m = 3, n = 5 \end{matrix}$

Všetky hľadané dvojice sú $(1,1), (3,5)$ a $(5,3)$.

2

5. Určite **všetky** dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn+1)$ deliteľné číslom $(m+n)^2$.

Riešenie:

$$4(mn+1) = l(m^2+2mn+n^2) = l(m+n)^2$$

$$\Rightarrow \quad (m+n)^2 \le 4(mn+1)$$

$$(m-n)^2 \le 4$$

preto $\boxed{0 \le m-n \le 2}$

Možnosti:

1. $m = n$

$$4(m^2+1) = l(4m^2)$$

$$\Rightarrow 4m^2 \mid 4 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow (m,n) = (1,1)$$

2. $m = n+1$ potom

$$4((n+1)n+1) = l[(n+1)^2 + 2(n+1)n + n^2]$$

$$4(n^2+n+1) = l[4n^2+4n+1]$$

$$4n^2+4n+1 \mid 4n^2+4n+4$$

$$\Rightarrow 4n^2+4n+1 \mid 3 \Rightarrow$$

ale $4n^2+4n+1 \ge 9$ nie je riešenie

3. $m = n+2$ potom

$$4(n^2+2n+1) = l(n^2+4n+4+2(n+2)n+n^2)$$

$$4n^2+8n+4 = l(4n^2+8n+4) \Rightarrow$$

n ľub. reálne č.

každá dvojica $(n+2, n)$ alebo $(n, n+2)$

6. Nájdite všetky trojice navzájom <u>rôznych</u> prvočísel p, q, r splňujúcich nasledujúce podmienky

$$p \mid q+r \quad q \mid r+2p \quad , \quad r \mid p+3q$$

<u>Riešenie:</u>

$$(q+r) = ap$$
$$2p+r = bq$$
$$p+3q = cr$$

Nech 1. p je najväčšie. Potom $p \mid q+r$; $q+r<2p \Rightarrow$

$$q \mid 2p+r = \overbrace{q+r=p}^{} 2q+3r \Rightarrow q \mid 3r \Rightarrow \underline{q=3}$$

$$p = r+3$$

$$r \mid r+12 \Rightarrow r \mid 12 \Rightarrow \underline{r=2}$$
$$\Rightarrow \underline{p=5}$$

2. Nech q je najväčšie. Potom

$q \mid 2p+r \qquad r+2p < 3q$

$r+2p = q$

$r+2p = 2q$

Ak a) $2q = r+2p \Rightarrow \underline{r=2} \Rightarrow q = p+1$ čo nemôže byť

b) $q = r+2p \Rightarrow p \mid 2r+2p \Rightarrow p \mid 2r \Rightarrow \underline{p=2}$

$r \mid 3p+3r = \cancel{7}p+3r \Rightarrow r \mid 14 \Rightarrow \underline{r=7}$

$= 14+3r$

$\underline{q = r+2p = 11}$

3. Najväčšie je r.

Potom $r \mid p+3q$ $p+3q < 4r$

$$p+3q = \begin{cases} 3r \\ 2r \\ r \end{cases}$$

a) $p+3q = 3r \Rightarrow p=3$ $r = q+1$ to nejde

b) $p+3q = 2r \Rightarrow p \mid q+r \Rightarrow p \mid 2(q+r) =$

c) $p+3q = r$, $p \mid$

$q \mid 2r+4p \Rightarrow 5p+3q \Rightarrow q \mid 5 \Rightarrow q=5$

$r = p+15$ to nejde

$p \mid (q+r) = 4q+p \Rightarrow p \mid 4q \Rightarrow \underline{p=2}$

$r = 2+3q$ q

$q \mid 4+r = 6+3q \Rightarrow q \mid 6 \Rightarrow \underline{q=3}$

$r = \underline{11}$

7, Dokážte, že ak pre rôzne prvočísla p, q a celé čísla x a y platí

$p \mid xp + yq \Rightarrow p$ delí y?

to je jasné.

8. Dokážte, že ak a delí b, tak $a \leq b$ $a \neq 0,\ b \neq 0$

$b = ak \qquad k \geq 1$

$a \leq ak$ hotovo.