Učební texty k přednášce ALGEBRAICKÉ STRUKTURY
Michal Marvan, Matematický ústav
Slezská univerzita v Opavě

8. Faktorové grupy

V této kapitole ukážeme, že existuje souvislost mezi faktorovými grupami a speciálními podgrupami, kterým se říká *normální podgrupy.*

Připomeňme, že kongruence na grupě $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ je relace ekvivalence κ na množině G splňující následující dvě podmínky:

1° Jestliže $a_1 \ \kappa \ b_1$, $a_2 \ \kappa \ b_2$, pak $a_1 a_2 \ \kappa \ b_1 b_2$.

2° Jestliže $a \ \kappa \ b$, pak $a^{-1} \ \kappa \ b^{-1}$.

(Viz obecná definice v univerzální algebře.)

Víme, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi kongruencemi a faktorovými algebrami. Ukážeme si, že v případě grup je možné nalézt ještě další vzájemně jednoznačnou korespondenci: mezi kongruencemi a tzv. normálními podgrupami.

Získáme tak vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi faktorovými grupami a normálními podgrupami.

Definice. Řekneme, že podgrupa H grupy G je *normální*, jestliže pro každý prvek $g \in G$ a každý prvek $h \in H$ platí $ghg^{-1} \in H$.

Stručně píšeme $g^{-1}Hg \subseteq H$, kde $gHg^{-1} := \{g \cdot h \cdot g^{-1} \mid h \in H\}$. Je zřejmé, že v komutativní grupě G je každá podgrupa normální.

Tvrzení. (a) *Buď κ kongruence na grupě G. Označme*

$$H_\kappa := [1]_\kappa$$

třídu obsahující jedničku grupy G. Pak je H_κ normální podgrupa v G.

(b) *Buď H normální podgrupa grupy G. Pak je relace κ_H definovaná předpisem*

$$a \kappa_H b \quad \text{právě tehdy, když} \quad ab^{-1} \in H$$

kongruence na grupě G.

Důkaz. (a) Nejdříve ukážeme, že H_κ je podgrupa v G. Stačí ukázat, že $ab^{-1} \in [1]_\kappa$ pro libovolná $a, b \in [1]_\kappa$. Počítejme ve faktorové grupě: $[ab^{-1}]_\kappa = [a]_\kappa \cdot [b]_\kappa^{-1} = [1]_\kappa \cdot [1]_\kappa^{-1} = [1 \cdot 1^{-1}]_\kappa = [1]_\kappa$. Tento výsledek ukazuje, že $a \cdot b^{-1} \in [1]_\kappa$.

Stejný trik můžeme použít při důkazu, že N_κ je normální podgrupa. Nechť $a \in [1]_\kappa$, $g \in G$. Počítejme: $[g \cdot a \cdot g^{-1}]_\kappa = [g]_\kappa \cdot [a]_\kappa \cdot [g^{-1}]_\kappa = [g]_\kappa \cdot [1]_\kappa \cdot [g^{-1}]_\kappa = [g \cdot 1 \cdot g^{-1}]_\kappa = [1]_\kappa$. Tudíž, třída obsahující jedničku je normální podgrupa.

Cvičení: Proveďte alternativní důkaz přímo s využitím vlastností $1°, 2°$ kongruencí.

(b) – Reflexivita: $a \ \kappa_H \ a$, protože $a \cdot a^{-1} = 1 \in H$.

– Symetrie: Nechť $a \ \kappa_H \ b$, tj. $a \cdot b^{-1} \in H$. V H leží též inverze tohoto prvku a $(a \cdot b^{-1})^{-1} = b \cdot a^{-1}$. Tudíž, $b \ \kappa_H \ a$.

– Tranzitivita: Nechť $a \ \kappa_H \ b$, $b \ \kappa_H \ c$, tj. $a \cdot b^{-1} \in H$, $b \cdot c^{-1} \in H$. V H leží též součin těchto dvou prvků: $a \cdot b^{-1} \cdot b \cdot c^{-1} = a \cdot c^{-1}$. Tudíž $a \ \kappa_H \ c$.

– Kompatibilita s inverzí “$^{-1}$”: Nechť $a \ \kappa_H \ b$, tj. $a \cdot b^{-1} \in H$. Podle normality při $g := a^{-1}$ leží v H též $g \cdot a \cdot b^{-1} \cdot g^{-1} = a^{-1} \cdot a \cdot b^{-1} \cdot a = b^{-1} \cdot a$. Tudíž, $b^{-1} \ \kappa_H \ a^{-1}$, a ze symetrie též $a^{-1} \ \kappa_H \ b^{-1}$.

– Kompatibilita se součinem "$\cdot$": Nechť $a_1 \; \kappa_H \; b_1$, $a_2 \; \kappa_H \; b_2$, tj. $a_1 \cdot b_1^{-1} \in H$, $a_2 \cdot b_2^{-1} \in H$. Podle normality pak při $g := a_1$ leží v H též $a_1 \cdot a_2 \cdot b_2^{-1} \cdot a_1^{-1}$. Následovně leží v H součin s $a_1 \cdot b_1^{-1}$, což jest $a_1 \cdot a_2 \cdot b_2^{-1} \cdot b_1^{-1} = a_1 \cdot a_2 \cdot (b_1 \cdot b_2)^{-1}$. Tudíž, $a_1 \cdot a_2 \; \kappa_H \; b_1 \cdot b_2$.

Zobrazení $\kappa \mapsto H_\kappa$ z množiny všech kongruencí do množiny všech normálních podgrup a zobrazení $H \mapsto \kappa_H$ opačným směrem jsou dokonce vzájemně inverzní. Plyne to z následujícího tvrzení:

Tvrzení. *Pro libovolnou normální podgrupu H platí $H = H_{\kappa_H}$. Pro libovolnou kongruenci κ platí $\kappa = \kappa_{H_\kappa}$.*

Důkaz. Cvičení.

Jak jsem již uvedli, z předchozích výsledků vyplývá existence vzájemně jednoznačné korespondence mezi normálními podgrupami grupy G a jejími faktorovými grupami. Ve směru od faktorové grupy k normální podgrupě je situace prostá – příslušná normální podgrupa je třída obsahující jedničku grupy.

V opačném směru se použije pojem rozkladu grupy podle podgrupy, který nyní zavedeme. Bude se nám ještě při různých příležitostech hodit.

Definice. Buď G grupa a K její podgrupa, ne nutně normální. Zaveďme dva rozklady na G.
(1) Levý rozklad $G/_{\mathrm{l}}K := \{gK \mid g \in G\}$.
(2) Pravý rozklad $G/_{\mathrm{r}}K := \{Kg \mid g \in G\}$.
Zde $gK := \{g \cdot k \mid k \in K\}$ a analogicky $Kg := \{k \cdot g \mid k \in K\}$.

Že jde skutečně o rozklady je ovšem nutno dokázat. Omezme se na případ levého rozkladu, protože pravý je analogický.

Zřejmě platí $G = \bigcup_{g \in G} gK$, protože $g = g \cdot 1 \in gK$ pro každé $g \in G$. Zároveň vidíme, že třídy gK jsou neprázdné. Zbývá ukázat, že třídy jsou po dvou disjunktní. Je-li však $h \in g_1K \cap g_2K$, pak $h = g_1 \cdot k_1 = g_2 \cdot k_2$, takže $g_1 = g_2 \cdot k_2 \cdot k_1^{-1}$. Načež všechny prvky $g_1 \cdot k \in g_1K$ leží v g_2K, protože $g_1 \cdot k = g_2 \cdot k_2 \cdot k_1^{-1} \cdot k \in g_2K$.

Tvrzení. *Je-li K normální podgrupa grupy G, pak levý a pravý rozklad splynou, $G/_{\mathrm{l}}H = G/_{\mathrm{r}}H$, a jsou totožné s rozkladem podle kongruence κ_K.*

Důkaz. Snadno vidíme, že $Kg \subseteq gKg^{-1}g = gK$. Podobně $gK \subseteq g^{-1}gKg = Kg$. Tudíž, $gK = Kg$. Jednoduchým výpočtem $[g]_{\kappa_K} = \{a \in G \mid a \; \kappa_K \; g\} = \{a \in G \mid a \cdot g^{-1} \in K\} = \{a \in G \mid a = k \cdot g, \exists\, k \in K\} = Kg$ dokážeme i druhé tvrzení.

Nakonec bude zajímavé zjistit, jaká normální podgrupa odpovídá kongruenci asociované s homomorfismem grup.

Věta. *Buď $f : A \to B$ homomorfismus, označme* $\operatorname{Ker} f = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$. *Pak je* $\operatorname{Ker} f$ *normální podgrupa v A a platí* $\operatorname{Ker}_f = H_{\equiv_f}$.

Důkaz. Připomeňme, že $a \equiv_f b$ právě tehdy, když $f(a) = f(b)$. Počítejme: $H_{\equiv_f} = [1]_{\equiv_f} = \{a \in A \mid a \equiv_f 1\} = \{a \in A \mid f(a) = f(1)\} = \{a \in A \mid f(a) = 1\} = \operatorname{Ker}_f$.

Odtud také plyne, že $\operatorname{Ker} h$ je normální podgrupa.