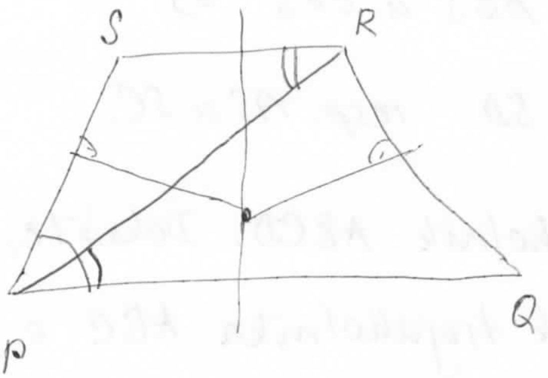
MATEMATICKÁ BESEDA

4.11.2011

GEOMETRIA

1. Dokážte, že každý tetivový lichobežník je rovnoramenný.

Riešenie:



Tetivový $\Rightarrow \measuredangle QPS + \measuredangle SRQ = 180°$

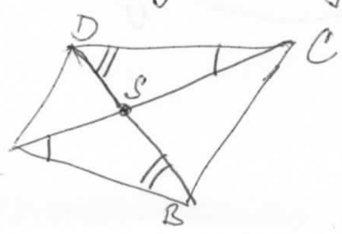
Lichobežník $\Rightarrow \measuredangle QPR = \measuredangle PRS \Rightarrow$ Obvodové uhly nad tetivami QR, PS majú rovnakú veľkosť $\Rightarrow$

$|QR| = |PS|$.

Iný spôsob: Os každej tetivy prechádza stredom kružnice, preto je os strany PQ totožná s osou strany RS (sú rovnobežné a prechádzajú spoločným bodom) a podľa tejto osi sú úsečky PS, QR súmerne združené, teda zhodné.

2. Dokážte, že v štvoruholníku sa uhlopriečky navzájom polia práve vtedy, keď je to rovnobežník.

Riešenie:

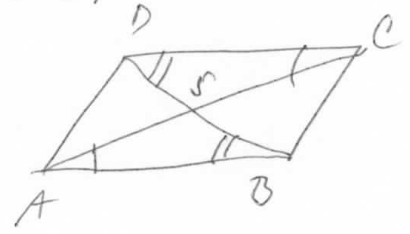


$\Rightarrow \triangle ABS \sim \triangle CDS$

$\Rightarrow AB \parallel CD$

analogicky $BC \parallel AD$.

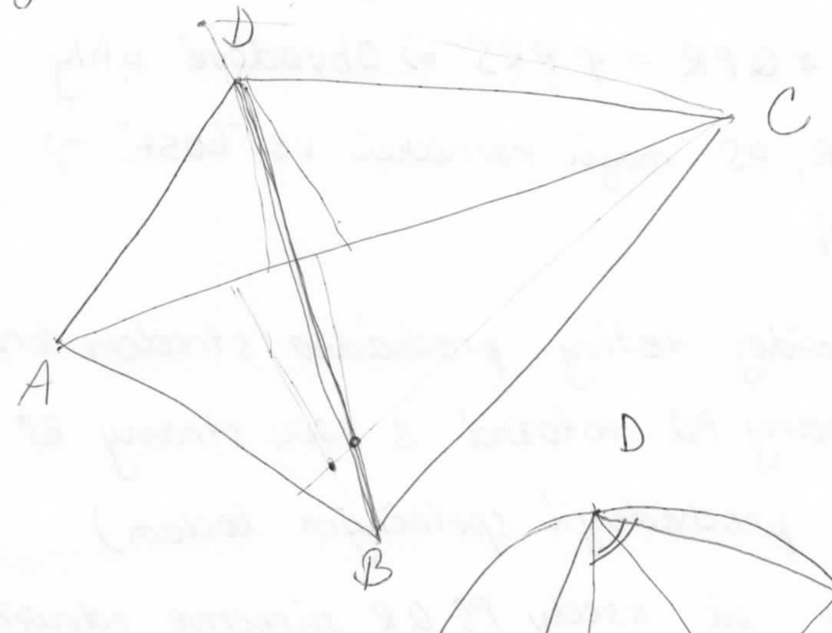
Naopak. Ak ABCD je rovnobežník s priesečníkom uhlopriečok S,

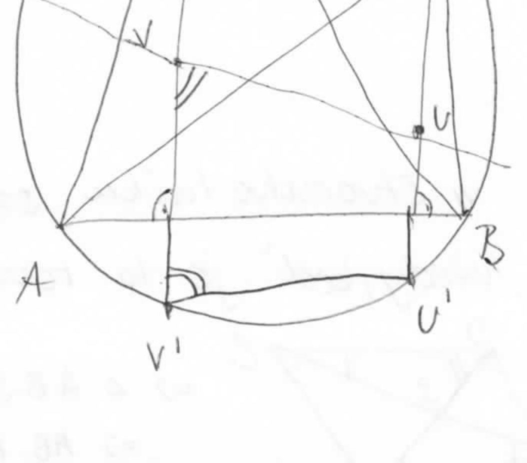


plynie naopak zo rovnosti striedavých uhlov zhodnosť trojuholníkov ABS a CDS =>

zhodnosť úsečiek BS, SD resp. AS a SC.

3. Je daný tetivový štvoruholník ABCD. Dokážte, že spojnica priesečníka výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD.

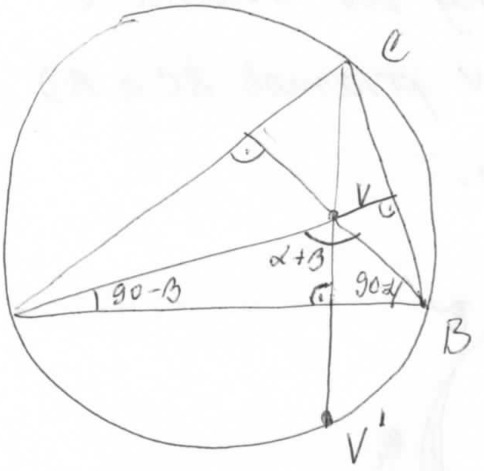




Pomocná úloha 4.

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k. Dokážte, že obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa priamky AB leží na kružnici k.

Riešenie:



$$\sphericalangle AVB = \alpha + \beta = 180 - \sphericalangle ACB$$

$\Rightarrow$ štvoruholník $ABCV'$ je tetivový

Tvrdenie platí i pre tupouhlý $\triangle$ (treba zasa dopočítať uhly!)

Späť k úlohe č. 3:

Pomocou úlohy č. 4. dostaneme, že $CU'V'D$ je tetivový štvoruholník, navyše lichobežník (DV' a CU' sú obe kolmice na AB) a podľa úlohy 1 je rovnoramenný.

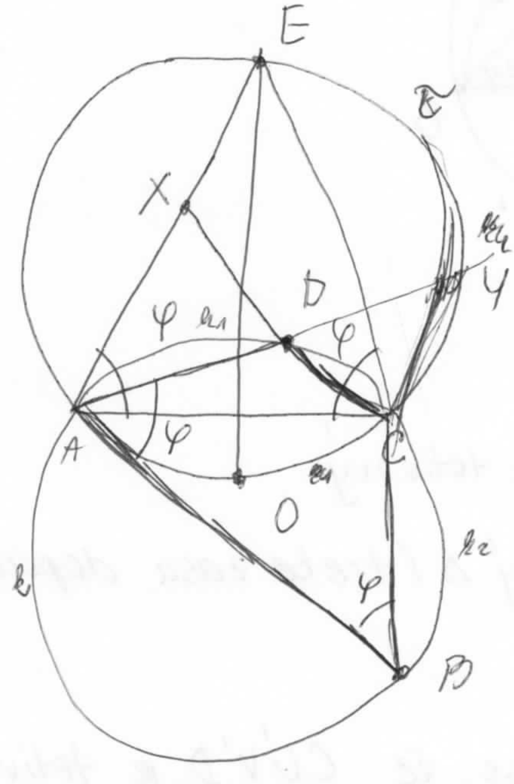
Potom platí $\sphericalangle CDU' = \sphericalangle U'V'D = \sphericalangle UVV'$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{UV}$ čo bolo treba dokázať.

Obrázok vyzerá trošku inač ak je aspoň jeden z trojuholníkov ABC a ABD tupouhlý, ale argumentácia je podobná, body C, D, V', U' vždy vytvoria rovnoramenný lich., i keď nič nutne v uvedenom poradí.

5. Je daná kružnica k s tetivou AC, ktorá nie je priemerom. Na jej dotyčnici vedenej bodom A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D priesečník kružnice k s vnútrom úsečky XC (pokiaľ existuje). Trojuholník ACD doplníme na lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice k.
Vráťte množinu priesečníkov priamok BC a AD odpovedajúcim všetkým takým lichobežníkom.

Riešenie:



Obr. 1

Budeme uvažovať len situáciu, kde $AB \parallel CD$ (inač by $AD \parallel CD$ a priesečník by neexistoval)
Označme O stred kružnice k, E priesečník dotyčníc z bodov A a C
A, C ležia na Thalesovej kružnici τ s priemerom OE.
a sú podľa neho súmerne združené.

$\sphericalangle CAE = \varphi$

Kružnica k zrejme pretne úsečku XC vo vnútornom bode D, práve keď bod X je buď vnútorný bod AE alebo leží na polopriamke opačnej k $\overrightarrow{AE}$.

a) Prvý prípad (obr. 1)

$\sphericalangle ADC = \varphi$ podľa vlastnosti úsekového uhlu.
(rozmysliet!)

Podľa príkladu 1 je $ABCD$ tetivový lichobežník rovnoramenný $\Rightarrow \sphericalangle BAD = \varphi$

$\triangle AYB$ a AEC sú rovnoramenné s rovnakým uhlom pri základni $\Rightarrow \sphericalangle AYB = \sphericalangle AEC$

$\Rightarrow$ Y leží na τ, presnejšie na oblúku CE.

V druhom prípade je úvaha analogická a Y leží na oblúku AE.

Treba ešte ukázať (opačnou úvahou) že každý vnútorný bod Y oblúkov CE a AE kružnice τ je priesečníkom priamok BC a AD nejakého uvažovaného lichobežníka.

Opäť treba rozlíšiť dva prípady, podľa toho, kde bod Y leží.

Ak Y leží na CE, zostrojíme D (priesečník s k_1 AD)

$\Rightarrow$ dostanem bod X vnútri AE.

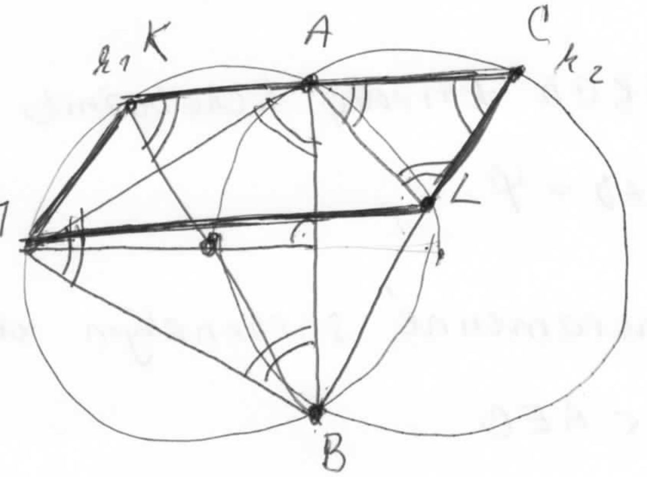
YC priesečník s k_2 dostanem B.

Prečo $AB \parallel CD$?

$|AO| = |CO|$ $\Rightarrow$ YO je osa uhlu $\sphericalangle AYC$

$\Rightarrow$ A a B i C a D sú súmerne združené podľa tejto osi obe sú kolmé na OY, teda rovnobežné.

6. Dané sú dve zhodné kružnice k_1, k_2 s polomerom rovným vzdialenosti ich stredov. Ich priesečníky označme A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, aby úsečka BC pretla kružnicu k_1 v bode rôznom od B, ktorý označíme L. Priamka AC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od A, ktorý označíme K.



Dokážte že $\triangle ACL$ a BCK sú rovnoramenné.

Riešenie: $\triangle BCK$ je rovnoramenný.

$\sphericalangle ALB = 180 - \sphericalangle AKB \Rightarrow \sphericalangle ALC = \sphericalangle AKB = \sphericalangle ACL$

$\Rightarrow \triangle ALC$ je rovnoramenný.

7. Zadanie ako v úlohe 6.

Nech M je priesečník k_1 s osou AB, ukážte, že KCLM je rovnobežník.

Riešenie: $\triangle ABM$ je rovnostranný (prečo?)

$= \sphericalangle AMB = 60^\circ = \sphericalangle ALC = \sphericalangle AKB = \sphericalangle ACL$

$= \triangle ACL$ je rovnostranný.

$\Leftarrow$) $\triangle\, BKC$ je rovnostranný

Potom (obvodové uhly) $\sphericalangle MLB = 60^\circ$

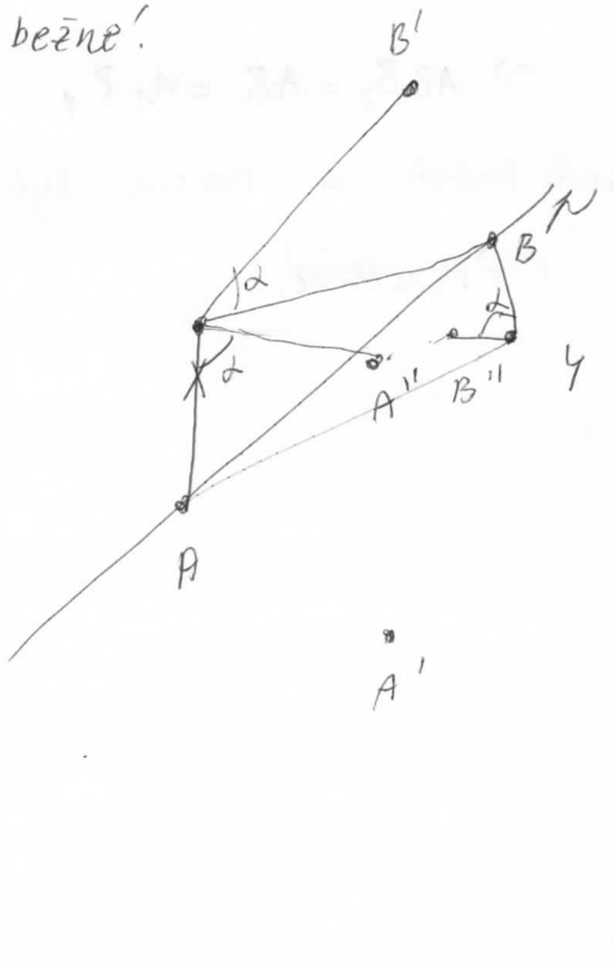
$\Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{KL}$

$\sphericalangle MKA = 120^\circ \; (180-60)$

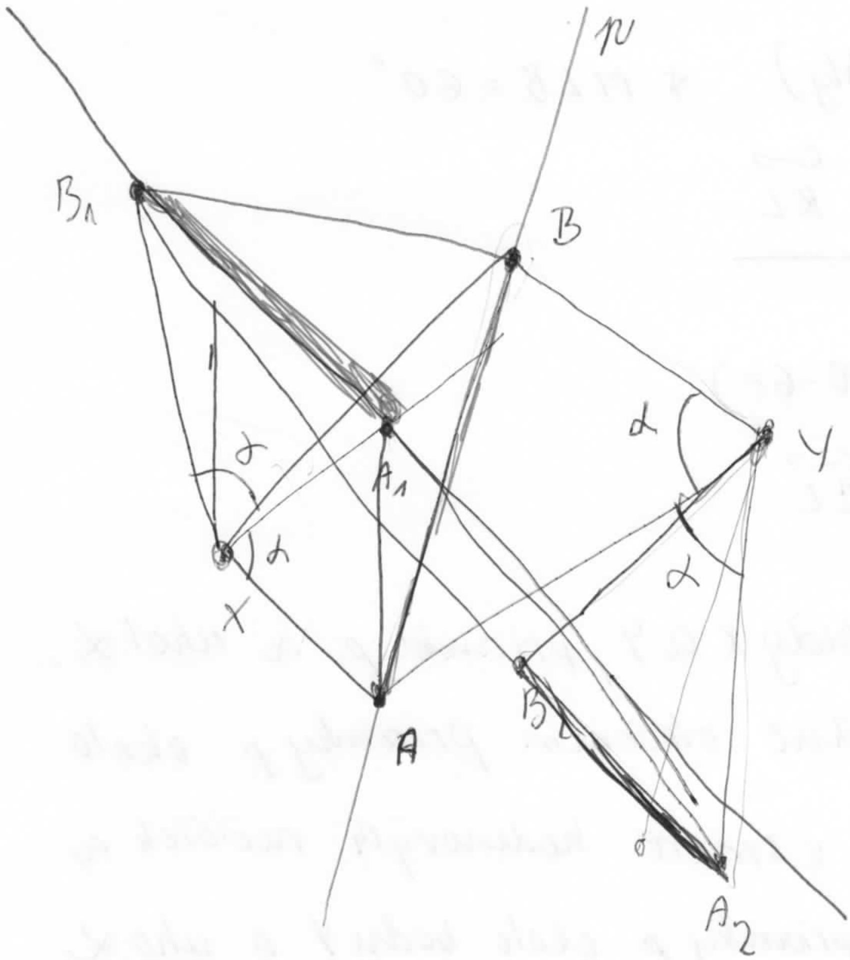
$\Rightarrow \overleftrightarrow{MK} \parallel \overleftrightarrow{CL}$

8. Sú dané dva body X a Y, priamka p a uhol α. Nech priamka q vznikne otočením priamky p okolo bodu X o uhol α v smere hodinových ručičiek a priamka r otočením priamky p okolo bodu Y o uhol α v smere hodinových ručičiek. Dokáž, že priamky q a r sú rovnobežné!

Riešenie:



lepší obrázok



$\Rightarrow A_1B_1 = AB$ $\Rightarrow A2B_2 = AB = A_1B_1$

a z podobnosti $\triangle$ musia byť

i rovnobežné.