Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební text z geometrie
M. Marvan

Přímka je čára, která leží stejnoměrně se svými body na sobě.

Eukleides, Základy

Geometrie lineárních útvarů

1. Předmluva

Tento učební text k předmětu Geometrie je určen studentům druhého ročníku bakalářského studia Slezské univerzity v Opavě. První část, kterou právě čtete, pojednává o geometrii lineárních útvarů, jako jsou přímky a roviny a jejich analogie ve vícerozměrných prostorech. Zavádějí se v ní odpovídající struktury a řeší se některé základní úlohy.

Geometrická intuice je velmi účinná při odhalování zákonitostí matematického i reálného světa. Přesto v tomto textu zcela chybí obrázky. Je to hlavně proto, že kreslení pěkných obrázků je časově náročné a autor se k němu ještě nedostal. Studentům doporučuji, aby navštěvovali přednášky a cvičení nebo si obrázky kreslili sami.

2. Úvod

Geometrie (řecky $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ = zeměměřičství) je jednou z nejstarších nauk. Četné doklady o geometrickém myšlení a jeho vývoji nalézáme již v neolitu. Počátky geometrie lze spojit s počátky stavitelství, astronomie a ornamentálního umění. Již první dochovaná písemná pojednání o geometrii (z Mezopotámie, Indie, Egypta a Číny) však představují již poměrně rozsáhlé soubory poznatků o délkách, úhlech, plochách a objemech. Mají podobu numericky řešených úloh, obvykle bez jakéhokoliv odůvodnění postupu. Jsou jen zčásti správné, např. délka kružnice bývala určována jako trojnásobek průměru.

Cvičení. Babylonská hliněná tabulka datovaná kolem roku 2600 př. n. l. obsahuje následující úlohu a její řešení: *Obvod kruhu je* 60*, výška úseče je* 2*, jaká je délka sečny*? Zdvojnásob 2, dostaneš 4. Odečti 4 od 20, dostaneš 16. Umocni 16, dostaneš 256. Odečti 256 od 400, dostaneš 144. Odmocni 144, dostaneš 12, délku sečny.

Co znamenají hodnoty 20 a 400? Opravte je. Dostaneme pak správný výsledek? Znali Babyloňané Pythagorovu větu?

Cvičení. Kdo byl *harpedonapt* a co dělal?

Nejstarší známý systematický výklad geometrie představují Eukleidovy *Základy* ($\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$), vzniklé kolem roku 300 př. n. l. v Alexandrii. Eukleides v třinácti knihách vyložil matematické znalosti své doby: geometrii (9 knih) a teorii čísel (4 knihy). Nejvýznamnější inovací oproti dochovaným textům z dřívější doby je použití *axiomatické metody.* Všechna tvrzení, s výjimkou definic, postulátů a axiomů, jsou dokazována. Geometrie se tak stala deduktivní vědou.

Geometrie roviny (planimetrie) a prostoru (stereometrie), se kterou jste se setkali na základní a střední škole, je geometrií Eukleidových Základů. Během staletí, která uplynula od Eukleidových dob, bylo nashromážděno obrovské množství poznatků. Důležitou událostí byl vznik *analytické geometrie*, to jest, zavedení souřadnic a studium geometrických objektů metodami analýzy a algebry. Otcem analytické geometrie je René Descartes (Renatus Cartesius, 1596–1650). Dřívější, bezsouřadnicový přístup se nazývá *syntetická geometrie.*

Moderní geometrie značně přesáhla své klasické hranice: expandovala do vícerozměrných prostorů, a to nejen reálných a komplexních, ale i mnohem obecnější povahy. Běžně se používají obecné (křivočaré) souřadnice. Geometrie našla uplatnění v klasické i moderní fyzice (zejména v mechanice, teorii relativity, teorii strun) a odtud také čerpala podněty pro svůj další rozvoj. Moderní geometrie je studiem myšlených objektů spojité povahy a vztahů mezi nimi, nezávisle na volbě souřadnic.

Jedním z kriterií, podle nichž můžeme třídit geometrické poznatky, je kriterium invariance, podle nějž rozeznáváme geometrii Eukleidovskou, afinní, projektivní, konformní a další. Do Eukleidovské geometrie řadíme poznatky invariantní vůči shodnostem (transformacím zachovávajícím délky a potažmo i odchylky a objemy).

Do *afinní geometrie* řadíme poznatky invariantní vůči tzv. afinním transformacím (budeme je definovat níže). Příkladem je rovnoběžná projekce. V pozadí afinní transformace bodů je vždy nějaká lineární transformace vektorů. Afinní transformace zachovávají lineární útvary (přímky se zobrazují na přímky) a jejich vzájemnou polohu (např. rovnoběžnost přímek); jde proto o afinní pojmy. Ani odchylky, ani vzdálenosti, ani obsahy se obecně nezachovávají, a proto nepatří mezi afinní pojmy. Zachovává se však poměr délek kolineárních vektorů (umístěných v jedné přímce), tzv. dvojpoměr.

Příklad. Příkladem rovnoběžného promítání je vrhání slunečního stínu, je-li osluněný prostor tak malý, že sluneční paprsky můžeme považovat za rovnoběžné. Představme si, že řešíme nějakou úlohu na okenním skle. Je-li úloha afinní, pak bude správné i řešení, které sluneční paprsky vykreslí na stěně nebo podlaze místnosti. Afinní úlohou je například konstrukce středu úsečky nebo těžiště trojúhelníka.

Do *projektivní geometrie* řadíme poznatky invariantní vůči tzv. projektivním transformacím. Příkladem je středová projekce (ve výtvarném umění se projevuje jako perspektiva). Vyřešíme-li nějakou projektivní úlohu na průhledné rovné ploše, bude správné i řešení, které dostaneme jeho pomítáním na libovolnou rovinu. Projektivní transformace zachovávají lineární útvary (přímky se zobrazují na přímky), ale nikoliv jejich vzájemnou polohu. Průmětem rovnoběžných přímek mohou být různoběžky, a proto se v projektivní geometrii rovnoběžky protínají "v nekonečnu." Nezachovává se ani střed úsečky. Zachovává se tzv. *čtyřpoměr* čtyř bodů na přímce.

3. Afinní geometrie

Afinní geometrie pojednává o geometrických vlastnostech, k jejichž formulování nepotřebujeme žádné míry jako vzdálenost, odchylku nebo objem. Příkladem afinních objektů jsou přímky a roviny, mezi afinní pojmy patří např. rovnoběžnost, různoběžnost a mimoběžnost přímek, střed úsečky, apod.

Základní pojmy afinní geometrie jsou *bod* a *vektor*. V afinní geometrii jsou vektory chápány jako *volné*. Volnost vektoru $\mathbf{u}$ znamená, že může být umístěn v libovolném *počátečním* bodě A. Tím je pak jednoznačně určen příslušný *koncový* bod $B = A + \mathbf{u}$.

V tomto textu je afinní geometrie vlastně jen zastávka (ale důležitá) na cestě k eukleidovské geometrii. Eukleidovská geometrie má navíc skalární součin vektorů. Existují i neeukleidovské afinní geometrie, například geometrie Minkowského časoprostoru speciální teorie relativity.

3.1. Afinní prostory

Afinní prostor je zadán množinou $\mathcal{A}$ bodů, vektorovým prostorem $\mathbf{V}$ vektorů a zobrazením $\mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}$, určujícím koncový bod umístěného vektoru.

3.1. Definice. Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$. *Afinní prostor se zaměřením* $\mathbf{V}$ je množina $\mathcal{A} \neq \emptyset$ spolu se dvěma zobrazeními $+ : \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ a $- : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$ takovými, že pro libovolné $A, B \in \mathcal{A}$ a libovolná $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

(i) $A + \mathbf{0} = A$,

(ii) $(A + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = A + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$,

(iii) $A + (B - A) = B$,

(iv) $(A + u) - A = u$.

Prvky afinního prostoru se nazývají *body*. *Dimenze* afinního prostoru se definuje jako dimenze zaměření $\mathbf{V}$.

Proč vylučujeme prázdnou množinu? Prázdná množina by mohla být užitečná například jako průnik různoběžných afinních podprostorů (viz níže). Tento jinak dobrý účel však neospravedlňuje takovou anomálii, jakou by prázdný afinní podprostor byl. Kdybychom totiž připustili $\mathcal{A} = \emptyset$, bylo by možné splnit všechny ostatní podmínky této definice pro libovolný vektorový prostor v roli zaměření. Prázdná množina jako afinní podprostor by neměla jednoznačně určené ani zaměření, ani dimenzi.

3.2. Tvrzení. *Buď* $\mathcal{A}$ *afinní prostor se zaměřením* $\mathbf{V}$.

1. *Ke každé dvojici bodů* $A, B \in \mathcal{A}$ *existuje právě jeden vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ *takový, že* $B = A + \mathbf{u}$. *Tímto vektorem je* $\mathbf{u} = B - A$.

2. *Ke každému bodu* $A \in \mathcal{A}$ *a vektoru* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ *existuje právě jeden bod* $B \in \mathcal{A}$ *takový, že* $B - A = u$. *Tímto bodem je* $B = A + \mathbf{u}$.

Důkaz. 1. Buďte $A, B \in \mathcal{A}$ libovolné dva body. Existence vektoru $\mathbf{u}$: Podle axiomu (iii) vektor $\mathbf{u} = B - A$ splňuje $B = A + \mathbf{u}$. Jednoznačnost vektoru $\mathbf{u}$: Nechť $B = A + \mathbf{u}$. Pak $B - A = \mathbf{u}$ podle axiomu (iv).

2. Buď $A \in \mathcal{A}$ libovolný bod a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ libovolný vektor. Existence bodu B: Podle axiomu (iv) bod $B = A + \mathbf{u}$ splňuje $B - A = \mathbf{u}$. Jednoznačnost bodu B: Nechť $B - A = \mathbf{u}$. Pak $B = A + \mathbf{u}$ podle axiomu (iii).

Příklad. Ukažte, že

$$(C - B) + (B - A) = C - A.$$

Řešení: Máme dokázat rovnost dvou vektorů, $C - A$ a $(C - B) + (B - A)$. Umistěme oba vektory do bodu A a najděme koncové body:

$$A + (C - A) = C,$$

$$A + (C - B) + (B - A) = A + (B - A) + (C - B) = B + (C - B) = C.$$

Koncové body obou vektorů splývají, a proto podle Tvrzení 3.2 jsou si oba vektory rovny.

Cvičení. Ukažte, že

$$(A + u) - (B + v) = (A - B) + (u - v).$$

3.3. Dásledek. *Zvolme pevně libovolný bod* $A \in \mathcal{A}$. *Pak je přiřazení* $\mathbf{u} \mapsto A + \mathbf{u}$ *bijekcí* $\mathbf{V} \to \mathcal{A}$. *Inverzním zobrazením je* $B \mapsto B - A$, *které je bijekcí* $\mathcal{A} \to \mathbf{V}$.

Důkaz. Vztahy (iii) a (iv) znamenají, že při pevně zvoleném $A \in \mathcal{A}$ jsou zobrazení $\mathbf{V} \to \mathcal{A}$, $\mathbf{u} \mapsto A + \mathbf{u}$ a zobrazení $\mathcal{A} \to \mathbf{V}$, $B \mapsto B - A$, vzájemně inverzní.

Uveďme příklady afinních prostorů.

Příklad. 1. Každý vektorový prostor je afinním prostorem a je sám sobě zaměřením. Nechť $\mathcal{A} = \mathbf{V}$. Nechť $+ : \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ i $- : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$ jsou obvyklé operace ve $\mathbf{V}$. Snadno se ověří, že všechny axiomy platí.

2. Speciální případ: Nechť $\mathcal{A} = \mathbf{V} = \mathbb{R}^n$. Nechť $+ : \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ je obyčejné sčítání $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jako ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Tudíž, body i vektory jsou n-tice reálných čísel. Pro rozlišení je zvykem body zapisovat v hranatých a vektory v kulatých závorkách.

Například: $[3, 2] - [1, 2] = (2, 0)$ nebo $[1, 2] + (2, 0) = [3, 2]$, kdežto $[3, 2] + [1, 2]$ není definováno.

Příklad. Uvažujme o systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} &a_{11}x^1 + \cdots + a_{1n}x^n = b_1, \\ &\ldots \\ &a_{m1}x^1 + \cdots + a_{mn}x^n = b_m. \end{aligned}$$

Buď $\mathcal{A}$ množina všech jeho řešení $[x^1, \ldots, x^n] \in \mathbb{R}^n$ a podobně $\mathbf{V}$ množina všech řešení $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ homogenního systému

$$\begin{aligned} &a_{11}x^1 + \cdots + a_{1n}x^n = 0, \\ &\ldots \\ &a_{m1}x^1 + \cdots + a_{mn}x^n = 0, \end{aligned}$$

který obdržíme nahrazením všech koeficientů $b_1, \ldots, b_m$ na pravé straně nulami. Z lineární algebry je dobře známo, že $\mathbf{V}$ je vektorový podprostor v prostoru $\mathbb{R}^n$. Zaveďme zobrazení $+ : \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}$ resp. $- : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbf{V}$ jako součet resp. rozdíl po složkách. Pak $\mathcal{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}$.

Vyplývá to ze známé věty, že obecné řešení nehomogenní soustavy (čili $\mathcal{A}$) je součtem partikulárního řešení nehomogenní soustavy (čili $A \in \mathcal{A}$) a obecného řešení homogenní soustavy (čili $\mathbf{V}$).

3.2. Afinní podprostory

Přímky, roviny a jejich vícerozměrné analogie jsou v afinní geometrii zaváděny jako tzv. afinní podprostory.

3.4. Definice. Buď $\mathcal{A}$ afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}$, buď $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ neprázdná podmnožina a $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ vektorový podprostor. Nechť
(i) pro každý bod $B \in \mathcal{B}$ a každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ platí $B + \mathbf{u} \in \mathcal{B}$;
(ii) pro každé dva body $B, B' \in \mathcal{B}$ platí $B' - B \in \mathbf{U}$.
Pak se množina $\mathcal{B}$ nazývá *afinní podprostor se zaměřením* $\mathbf{U}$.

Uvedenou definici můžeme stručně shrnout slovy: Afinní podprostor a jeho zaměření jsou podmnožiny uzavřené na všechny algebraické operace, které mezi nimi existují.

3.5. Tvrzení. *Buď $\mathcal{A}$ afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}$, buď $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ jeho afinní podprostor se zeměřením $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$. Pak je $\mathcal{B}$ afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}$.*

Důkaz. Především zavedeme zobrazení $+ : \mathcal{B} \times \mathbf{U} \to \mathcal{B}$ i $- : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbf{U}$ jako ohraničení stejnojmenných zobrazení mezi afinním prostorem $\mathcal{A}$ a jeho zaměřením $\mathbf{V}$. Že to je možné, zaručují podmínky (i) a (ii) z definice afinního podprostoru. Splnění každé z podmínek (i)–(iv) z definice afinního prostoru je pak zřejmým důsledkem splnění těchto podmínek v $\mathcal{A}$.

Cvičení. Zaměření $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ je jednoznačně určeno množinou $\mathcal{B}$ jako $\mathbf{U} = \{B - A \mid A, B \in \mathcal{B}\}$. Dokažte.

Výsledek cvičení nás opravňuje hovořit o afinním podprostoru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, aniž by bylo nutno uvádět, který vektorový podprostor je jeho zaměřením.

Příklad. Příklad afinního prostoru určeného soustavou lineárních rovnic, uvedený v předchozí kapitole, je příkladem afinního podprostoru v prostoru $\mathbb{R}^n$ (ověřte samostatně).

3.6. Tvrzení. *Buď $\mathcal{A}$ afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}$, buď $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ vektorový podprostor. Pro libovolný bod $B \in \mathcal{A}$ označme*

$$B + \mathbf{U} = \{B + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}.$$

Pak je množina $B + \mathbf{U}$ afinní podprostor prostoru $\mathcal{A}$, se zaměřením $\mathbf{U}$.

Můžeme říci, že afinní podprostor $B+\mathbf{U}$ je množina koncových bodů vektorů z $\mathbf{U}$ umístěných do bodu B.

Důkaz. Ověřme podmínky z definice afinního podprostoru.
(i): Nechť $C \in B+\mathbf{U}$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Pak $C = B+\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, načež $C+\mathbf{u} = B+\mathbf{v}+\mathbf{u} \in B+\mathbf{U}$, protože $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathbf{U}$.
(ii): Nechť $C, C' \in \mathcal{B}$. Pak $C = B+\mathbf{v}$ a $C' = B+\mathbf{v}'$, kde $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{U}$, načež $C'-C = \mathbf{v}'-\mathbf{v} \in \mathbf{U}$.

Tvrzení lze obrátit, přižemž bod B můžeme v daném podprostoru $\mathcal{B}$ volit libovolně:

3.7. Tvrzení. *Buď $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ afinní podprostor se zaměřením $\mathbf{U}$, buď $B \in \mathcal{B}$ libovolný bod. Pak platí $\mathcal{B} = B + \mathbf{U}$.*

Důkaz. Máme dokázat rovnost $\mathcal{B} = B + \mathbf{U}$. Dokažme obě inkluze.
$\subseteq$: Nechť $C \in \mathcal{B}$. Pak podle podmínky (i) z definice podprostoru platí $C - B \in \mathbf{U}$, načež $C = B + (C - B) \in B + \mathbf{U}$.
$\supseteq$: Nechť $C \in B + \mathbf{U}$. Pak $C = B + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, načež $C \in \mathcal{B}$ podle podmínky (ii) z definice podprostoru.

3.8. Poznámka. Formule $A + \mathbf{U}$ je v podstatě parametrickým vyjádřením podprostoru. Je-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ báze podprostoru $\mathbf{U}$, pak lze libovolný bod z $A+\mathbf{U}$ zapsat jako $A+t^1\mathbf{u}_1+\cdots+t^m\mathbf{u}_m$, kde $t^1, \ldots, t^m$ jsou reálné parametry.

3.3. Průnik afinních podprostorů

Jak můžeme poznat, že se afinní podprostory protínají?

3.9. Tvrzení. (i) *Afinní podprostory $A + \mathbf{U}$, $B + \mathbf{V}$ mají společný bod právě tehdy, když platí*

$$B - A \in \mathbf{U} + \mathbf{V};$$

(ii) *mají-li společný bod P, je jejich průnikem podprostor $P + \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.*

Důkaz. (i) Nechť $P \in (A + \mathbf{U}) \cap (B + \mathbf{V})$. Pak existují vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ takové, že $P = A + \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$. Potom $\mathbf{0} = P - P = (A + \mathbf{u}) - (B + \mathbf{v}) = (B - A) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$, a tedy $B - A = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathbf{U} + \mathbf{V}$.
Nechť naopak $B - A = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Ukažte sami, že $A + \mathbf{u} = B - \mathbf{v}$ je bod společný podprostorům $A + \mathbf{U}$ a $B + \mathbf{V}$.
(ii) Cvičení.

Snadno lze definovat rovnoběžnost afinních podprostorů, a to i v případě, že podprostory mají různé dimenze.

3.10. Definice. Afinní podprostory $A + \mathbf{U}$, $B + \mathbf{V}$ se nazývají *rovnoběžné*, jestliže $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ nebo $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}$.

Příklad. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $A + [\![\mathbf{u}]\!]$ a $B + [\![\mathbf{v}]\!]$ v afinním prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$A = [a_1, a_2, a_3], \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),$$
$$B = [b_1, b_2, b_3], \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Přímky jsou rovnoběžné právě když $[\![\mathbf{u}]\!] = [\![\mathbf{v}]\!]$, tj. právě když jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ závislé, tj. právě když má matice

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

hodnost 1.

Přímky se protínají právě tehdy, když $B - A \in [\![\mathbf{u}]\!] + [\![\mathbf{v}]\!]$, kde ovšem $[\![\mathbf{u}]\!] + [\![\mathbf{v}]\!] = [\![\mathbf{u}, \mathbf{v}]\!]$, tj. právě když mají matice M a

$$M' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

stejnou hodnost.

Cvičení. Pokračujíce v předchozím příkladu, vyplňte tabulku

	$\operatorname{rk} M' = 1$	$\operatorname{rk} M' = 2$	$\operatorname{rk} M' = 3$
$\operatorname{rk} M = 1$			—
$\operatorname{rk} M = 2$	—		

slovy: totožné, rovnoběžné různé, různoběžné, mimoběžné. Proč nemohou nastat případy označené vodorovným proškrtnutím?

Cvičení. Nechť mají rovnoběžné afinní podprostory $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ společný bod. Ukažte, že potom $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ nebo $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2$.

3.4. Afinní souřadnice

3.11. Definice. Afinní prostor je *konečněrozměrný*, je-li jeho zaměřením konečněrozměrný vektorový prostor.

3.12. Definice. Buď $\mathcal{A}$ konečněrozměrný afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}$. *Afinní souřadná soustava* $(P, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ v $\mathcal{A}$ je tvořena libovolně zvoleným bodem $P \in \mathcal{A}$ a libovolnou bází $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathbf{V}$. *Afinní souřadnice* bodu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k afinní souřadné soustavě $(P, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou definovány jako souřadnice vektoru $A - P \in \mathbf{V}$ vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Zavedením afinních souřadnic získáváme bijekci mezi n-rozměrným afinním prostorem $\mathcal{A}$ a množinou $\mathbb{R}^n$ a současně i izomorfismus mezi zaměřením $\mathbf{V}$ a vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$. Souřadnice bodů budeme zapisovat v hranatých závorách, vektorů v kulatých.

Tudíž, $[a^1, \dots, a^n]$ jsou afinní souřadnice bodu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k afinní souřadné soustavě $(P, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ právě tehdy, když

$$A - P = \sum_i a^i \mathbf{v}_i,$$

nebo, ekvivalentně,

$$A = P + \sum_i a^i \mathbf{v}_i.$$

3.13. Tvrzení. *Buď dána afinní souřadná soustava* $(P, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ *v afinním prostoru* $\mathcal{A}$ *se zaměřením* $\mathbf{V}$. *Uvažujme opět o systému lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} &a_{11}x^1 + \dots + a_{1n}x^n = b_1, \\ &\dots \\ &a_{m1}x^1 + \dots + a_{mn}x^n = b_m \end{aligned} \tag{1}$$

a příslušném homogenním systému

$$\begin{aligned} &a_{11}u^1 + \dots + a_{1n}u^n = 0, \\ &\dots \\ &a_{m1}u^1 + \dots + a_{mn}u^n = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Označme $\mathcal{B}$ *množinu všech bodů* $X \in \mathcal{A}$, *jejichž afinní souřadnice* $[x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{R}^n$ *vyhovují systému* (1). *Označme* $\mathbf{U} \subseteq V$ *vektorový podprostor tvořený vektory, jejichž souřadnice* $(u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ *v bázi* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *jsou řešeními homogenního systému* (2). *Pak je* $\mathcal{B}$ *afinní podprostor v* $\mathcal{A}$ *a* $\mathbf{U}$ *je jeho zaměření.*

Důkaz. Cvičení.

3.14. Definice. Rovnice (1) se nazývají *obecné rovnice podprostoru.*

Obecné rovnice podprostoru snadno převedeme na parametrické rovnice (viz Poznámka 3.8) tak, že soustavu (1) vyřešíme (najdeme $x^1, \dots, x^n$).

Jak převést parametrické rovnice na obecné? Nejprve najdeme homogenní systém (2) popisující zaměření $\mathbf{U}$. Hledáme $a_1, \dots, a_n$ tak, aby pro všechny bázové vektory $\mathbf{u}$ z $\mathbf{U}$ platilo $a_1u^1 + \dots + a_nu^n = 0$. Tak získáme homogenní soustavu lineárních rovnic, z jejíchž fundamentálních řešení sestavíme po řádcích matici soustavy (2). Poté zvolíme libovolný bod z $\mathcal{B}$ o souřadnicích $[x^1, \dots, x^n]$ a z rovnic (1) určíme pravé strany $b_1, \dots, b_m$.

3.5. Afinní zobrazení

3.15. Definice. Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ afinní prostory se zaměřeními po řadě $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$. Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ se nazývá *afinní zobrazení*, jestliže existuje lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ takové, že pro libovolný bod $A \in \mathcal{A}$ a libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ platí

$$f(A + \mathbf{u}) = f(A) + \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinní izomorfismus.*

Zřejmě platí $\mathbf{f}(B - A) = f(B) - f(A)$, čímž je zobrazení $\mathbf{f}$ jednoznačně určeno (při zadaném zobrazení f).

Příklad. Zavedením afinních souřadnic získáváme afinní izomorfismus mezi n-rozměrným afinním prostorem $\mathcal{A}$ a afinním prostorem $\mathbb{R}^n$.

Zvolme afinní souřadné soustavy $P, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ v $\mathcal{A}$ a $P', \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$ v $\mathcal{A}'$. Pro bod B o souřadnicích $x^1, \dots, x^n$ máme

$$\begin{aligned} f(B) &= f\left(P + \sum_i x^i \mathbf{u}_i\right) = f(P) + \mathbf{f}\left(\sum_i x^i \mathbf{u}_i\right) = P' + f(P) - P' + \sum_i x^i \mathbf{f}(\mathbf{u}_i) \\ &= P' + \sum_j b^j \mathbf{u}'_j + \sum_i \sum_j x^i a_i^j \mathbf{u}'_j = P' + \sum_j \left(b^j + \sum_i x^i a_i^j\right) \mathbf{u}'_j. \end{aligned}$$

kde $(b^1, \dots, b^n)$ jsou souřadnice vektoru $f(P) - P'$ v bázi $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$ a a_i^j jsou prvky matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bazím $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$. Pro souřadnice $(x^{1\prime}, \dots, x^{n\prime})$ bodu $B' = f(B)$ proto dostáváme

$$x^{j\prime} = b^j + \sum_i a_i^j x^i,$$

čili, v maticovém zápisu,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}. \tag{3}$$

Ve speciálním případě $P' = f(P)$ je $\mathbf{b} = 0$, tudíž $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

3.16. Tvrzení. *Afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní izomorfismus právě tehdy, když je příslušná matice $\mathbf{A}$ invertibilní. K afinnímu izomorfismu existuje inverzní afinní zobrazení, v maticovém zápisu*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{4}$$

Důkaz. Cvičení.

3.17. Tvrzení. *Buď $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení. Pak platí:*
1. *Obraz $f\mathcal{B}$ afinního podprostoru $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je afinní podprostor v prostoru $\mathcal{A}'$.*
2. *Vzor $f^{-1}\mathcal{B}'$ afinního podprostoru $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ je afinní podprostor v prostoru $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Cvičení.

3.6. Přídavek: Afinní kombinace a barycentrické souřadnice

V afinním prostoru $\mathcal{A}$ lze sčítat nejen body a vektory, ale v jistých případech i body mezi sebou.

3.18. Definice. Buďte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ body, buďte $t^1, \dots, t^n \in \mathbb{R}$ reálná čísla. Zvolme libovolně bod $P \in \mathcal{A}$.

(i) Je-li $t^1 + \dots + t^n = 0$, položme

$$t^1 A_1 + \dots + t^n A_n = t^1(A_1 - P) + \dots + t^n(A_n - P) \in \mathbf{V}.$$

(ii) Je-li $t^1 + \dots + t^n = 1$, položme

$$t^1 A_1 + \dots + t^n A_n = P + t^1(A_1 - P) + \dots + t^n(A_n - P) \in \mathcal{A}.$$

3.19. Tvrzení. *Hodnoty $t^1 A_1 + \dots + t^n A_n$ z předchozí definice nezávisí na volbě bodu P.*

Důkaz. Nechť (i) $t^1 + \dots + t^n = 0$. Uvažujme o vektorech $t^1(A_1 - P) + \dots + t^n(A_n - P)$ a $t^1(A_1 - Q) + \dots + t^n(A_n - Q)$, kde Q je libovolný další bod. Rozdíl obou výsledků je roven

$$\begin{aligned} &t^1(A_1 - Q) + \dots + t^n(A_n - Q) - t^1(A_1 - P) - \dots - t^n(A_n - P) \\ &\quad = t^1(P - Q) + \dots + t^n(P - Q) = (t^1 + \dots + t^n)(P - Q) = 0. \end{aligned}$$

Nechť (ii) $t^1 + \dots + t^n = 1$. Uvažujme o bodech $P + t^1(A_1 - P) + \dots + t^n(A_n - P)$ a $Q + t^1(A_1 - Q) + \dots + t^n(A_n - Q)$, kde Q je libovolný další bod. Rozdíl obou výsledků je roven

$$\begin{aligned} &Q + t^1(A_1 - Q) + \dots + t^n(A_n - Q) - P - t^1(A_1 - P) - \dots - t^n(A_n - P) \\ &= Q - P + t^1(P - Q) + \dots + t^n(P - Q) = (-1 + t^1 + \dots + t^n)(P - Q) = 0. \end{aligned}$$

3.20. Definice. Buďte $t^1, \dots, t^n$ reálná čísla taková, že $t^1 + \dots + t^n = 1$. Pak se bod $t^1 A_1 + \dots + t^n A_n \in \mathcal{A}$ nazývá *afinní kombinace* bodů $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ s koeficienty $t^1, \dots, t^n$.

Příklad. Těžiště soustavy bodů $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ je bod

$$\frac{1}{n} A_1 + \dots + \frac{1}{n} A_n.$$

Příklad. Ukažme, že těžiště trojúhelníka dělí každou těžnici v poměru 1 : 2.

Buďte A, B, C vrcholy trojúhelníka. Body $C_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $A_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, $B_1 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ jsou středy jeho stran. Bod ve dvou třetinách těžnice měřeno od vrcholu C je

$$C + \tfrac{2}{3}(C_1 - C) = C + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - C) = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C,$$

tedy těžiště. Stejný výsledek obdržíme pro ostatní těžnice.

Je velmi dobře známo, že dva různé body určují přímku, dva body neležící v přímce určují rovinu, atd. Nejmenší afinní podprostor obsahující dané body snadno popíšeme pomocí afinních kombinací.

3.21. Definice. Buďte $B_1, \dots, B_n$ body afinního prostoru $\mathcal{A}$. Množina afinních kombinací

$$\{t^1 B_1 + \dots + t^n B_n \in \mathcal{A} \mid t^1 + \dots + t^n = 1\}$$

se nazývá *afinní obal* bodů $B_1, \dots, B_n$ a značí se $\langle B_1, \dots, B_n \rangle$.

3.22. Tvrzení. *Buďte $B_1, \dots, B_n$ body afinního prostoru $\mathcal{A}$. Afinní obal $\mathcal{B} = \langle B_1, \dots, B_n \rangle \subseteq \mathcal{A}$ je afinním podprostorem prostoru $\mathcal{A}$, obsahujícím body $B_1, \dots, B_n$. Je průnikem všech afinních podprostorů $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ obsahujících body $B_1, \dots, B_n$.*

Důkaz. Označme $\mathbf{V}$ zaměření prostoru $\mathcal{A}$. Nechť

$$\mathbf{U} = \{t^1 B_1 + \dots + t^n B_n \mid t^1 + \dots + t^n = 0\} \subseteq \mathbf{V}.$$

Tvrzení je důsledkem následujících pomocných tvrzení:

1. $\mathbf{U}$ je vektorový podprostor ve $\mathbf{V}$;
2. součet bodu z $\mathcal{B}$ a vektoru z $\mathbf{U}$ je bod z $\mathcal{B}$;
3. rozdíl bodů z $\mathcal{B}$ je vektor z $\mathbf{U}$;
4. body $B_1, \dots, B_n$ leží v $\mathcal{B}$.

Tvrzení o průniku vyplývá z následujícího pomocného tvrzení:

5. Buď $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ podprostor, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{C}$ a $t^1 + \dots + t^n = 1$. Pak $t^1 B_1 + \dots + t^n B_n \in \mathcal{C}$.

Dokažte uvedená pomocná tvrzení jako cvičení.

3.23. Definice. Body $A_1, \dots, A_n$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se nazývají *nezávislé*, jestliže jsou vektory $A_2 - A_1, \dots, A_n - A_1$ lineárně nezávislé.

Vidíme, že z bodů $A_1, \dots, A_n$ můžeme vytvořit afinní souřadnou soustavu $A_1, A_2 - A_1, \dots, A_n - A_1$ v afinním obalu $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

3.24. Tvrzení. *Buďte $A_1, \dots, A_n$ body v n-rozměrném afinním prostoru. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní*

1. *Body $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé;*
2. *Ke každému bodu $B \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ existuje právě jedna n-tice $t^1, \dots, t^n \in \mathbb{R}$ taková, že $t^1 + \dots + t^n = 1$ a $B = t^1 A_1 + \dots + t^n A_n$.*

Důkaz. Cvičení.

3.25. Definice. Čísla $t^1, \dots, t^n \in \mathbb{R}$ z předchozího tvrzení se nazývají *barycentrické souřadnice* bodu B vzhledem k n-tici nezávislých bodů $A_1, \dots, A_n$.

Příklad. *Úloha o třech sklenicích.* Často je zadávána následující úloha: Tři sklenice mají objem po řadě $u_{\max}, v_{\max}, w_{\max}$ objemových jednotek. Úkolem je odměřit přesně z objemových jednotek přeléváním vody mezi sklenicemi. Vyžaduje, aby byl vždy buď vylit celý obsah vylévané sklenice nebo aby dolévaná sklenice byla dolita do plného objemu.

Předpokládá se, že na začátku je v jednotlivých sklenicích po řadě u_0, v_0, w_0 vody; vhodnou volbou objemové jednotky lze dosáhnout toho, že $u_0 + v_0 + w_0 = 1$, což nadále předpokládáme. Celkem tedy máme v oběhu jednu objemovou jednotku vody, a to po celou dobu procesu.

Hodnoty u, v, w, označující množství vody v jednotlivých sklenicích během procesu, tudíž splňují rovnost $u + v + w = 1$ a můžeme je považovat za barycentrické souřadnice bodu P ležícího v rovině. Kromě podmínky $u + v + w = 1$ musí platit

$$0 \le u \le u_{\max}, \quad 0 \le v \le v_{\max}, \quad 0 \le w \le w_{\max},$$

a proto bude zmíněný bod ležet v průniku $\mathcal{D}$ oblastí vymezených těmito podmínkami. Oblast $\mathcal{D}$ je část roviny. Přelévání lze interpretovat jako pohyb bodu po některé z přímek $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$, ukončený na hranici oblasti $\mathcal{D}$. Například, přelévání z u do v zaprvé znamená, že w je konstantní, a zadruhé musí skončit buď tím, že $u = 0$ nebo tím, že $v = v_{\max}$.

Řešení úlohy pak spočívá v hledání lomené čáry, která vychází z bodu (u_0, v_0, w_0), probíhá vždy podél přímek $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ nebo $w = \text{const}$, láme se jen na hranici rovinné oblasti $\mathcal{D}$ a končí v některém z bodů hranice oblasti $\mathcal{D}$, kde $u = z$, $v = z$ nebo $w = z$.

Zdroj: `http://www.cut-the-knot.org/triangle/glasses.shtml`

Cvičení. Tři sklenice mají objem po řadě $\frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}$ objemové jednotky. Úkolem je odměřit přesně $\frac{1}{4}$ objemové jednotky přeléváním vody mezi sklenicemi, je-li na počátku $\frac{1}{2}$ objemové jednotky vody v první sklenici a zbylé dvě jsou prázdné.

3.7. Přídavek: Další příklady a aplikace

Doposud jsme studovali afinní prostory nad polem $\mathbb{R}$ reálných čísel. Výsledky však zůstanou v platnosti i když pole $\mathbb{R}$ nahradíme libovolným jiným polem P. Při výběru $P = \mathbb{C}$ tak obdržíme komplexní afinní prostor, ve kterém se pracuje formálně stejně jako v reálném afinním prostoru.

3.26. Poznámka. Nad polem $P = \mathbb{Q}$ racionálních čísel obdržíme geometrii racionálních bodů (bodů s racionálními souřadnicemi) v $\mathbb{R}$. Množina racionálních bodů je zajímavá tím, že je uzavřená na konstrukce prováděné jen pravítkem. Kdybychom chtěli připustit konstrukce pravítkem i kružítkem, museli bychom základní pole P vybrat jako nejmenší rozšíření pole $\mathbb{Q}$ uzavřené na druhé odmocniny.

Obzvlášť pozoruhodné geometrie obdržíme, volíme-li za P některé konečné pole, například pole zbytkových tříd $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, kde p je prvočíslo. Vektorový prostor dimenze n pak má konečně mnoho prvků (přesně p^n) a stejný počet prvků má i odpovídající afinní prostor. Konečné afinní prostory mají aplikace v kryptografii.

Příklad. Pole $\mathbb{Z}_2$ má dva prvky, nulu 0 a jedničku 1. Kartézská mocnina $\mathbb{Z}_2^n$, tj. množina všech posloupností nul a jedniček délky n, je n-rozměrný afinní prostor nad polem $\mathbb{Z}_2$. Viděli jsme, že afinní zobrazení $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$ je zadáno formulí (3), kde $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ složená z nul a jedniček. Pro jednoduchost můžeme položit $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Předpokládejme, že chceme otevřeným kanálem (např. rádiem) doručit utajovanou zprávu v podobě posloupnosti nul a jedniček délky m. Zvolíme invertibilní matici typu $n \times n$ složenou z nul a jedniček a dopravíme ji příjemci spolehlivým kanálem (např. v zapečetěné obálce kurýrem). Tato matice je tzv. *kódovací klíč.*

Před odesláním depeši délky m rozdělíme na řadu podposloupností délky n (pokud m není celistvým násobkem n, zbytek doplníme náhodným textem). Poté podposloupnosti jednu po druhé vynásobíme maticí $\mathbf{A}$ a sestavíme z nich opět posloupnost délky m, kterou odešleme otevřeným kanálem. Příjemce zprávu dekóduje tak, že ji rozdělí na podposloupnosti délky n, které jednu po druhé vynásobí maticí $\mathbf{A}^{-1}$. Osoba neznalá klíče zprávu dekódovat nemůže.

Cvičení. V reálném světě je nutno počítat s tím, že každý klíč bude jednou vyzrazen. V daném případě k tomu stačí získat jedinou dekódovanou zprávu dostatečné délky (nejméně n^2) a její kódovanou podobu (která procházela otevřeným kanálem). Popište postup rekonstrukce klíče.

Příklad. V případě, kdy $\mathbf{A}$ je jednotková matice a $\mathbf{b}$ je vektor stejné délky jako přenášená zpráva (tj. $m = n$), získáváme prakticky i teoreticky "nerozluštitelnou" šifru. Příjemce dekóduje pomocí stejného kódovacího vektoru $\mathbf{b}$ (protože v $\mathbb{Z}_2$ platí $-\mathbf{b} = \mathbf{b}$). Jednou použité kódovací vektory se likvidují.

Je osudovou chybou použít jeden a týž vektor dvakrát. Představme si, že osoba neznalá klíče $\mathbf{b}$ zachytí dvě zprávy, $\mathbf{x}+\mathbf{b}$ a $\mathbf{y}+\mathbf{b}$. Snadno zjistí, že $(\mathbf{x}+\mathbf{b}) - (\mathbf{y}+\mathbf{b}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Má-li alespoň částečnou informaci o obou zprávách, může obě dekódovat.

Cvičení. Předpokládejme, že zprávy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou česky a pro převedení do binárního tvaru byl použit jeden ze známých kódů (např. ASCII Latin 2). Protože zpráva obsahuje slova českého jazyka, můžeme pro každé konkrétní slovo (např. *převrat*) vyzkoušet všechna možná umístění ve zprávě. Jak s pomocí $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ poznáme, že umístění může být správné? Jak můžeme tuto informaci dále využít?

Kromě kryptografických aplikací mají konečněrozměrné afinní prostory použití při konstrukci *samoopravných kódů* pro přenos dat po rušených kanálech (např. při komunikaci mezi Zemí a sondou na okraji sluneční soustavy). Nechť je $\mathbb{Z}_2^n$ množina všech znaků. Vlivem rušení může být přijat jiný znak, než byl vyslán. Jedno z možných řešení spočívá v konstrukci injektivního afinního zobrazení f z $\mathbb{Z}_2^n$ do některého "většího" prostoru $\mathbb{Z}_2^m$, $m > n$. Místo znaku $a \in \mathbb{Z}_2^n$ vždy vyšleme odpovídající znak $f(a) \in \mathbb{Z}_2^m$. Obraz $\operatorname{Im} f$ je afinní podprostor v prostoru $\mathbb{Z}_2^m$, jehož prvky vzájemně jednoznačně odpovídají vysílaným znakům. Tudíž, vysílají se znaky z $\operatorname{Im} f$, ale vlivem rušení se přijímají znaky ležící v prostoru $\mathbb{Z}_2^m$, které nemusí nutně náležet $\operatorname{Im} f$.

Je-li přijat znak ležící v $\operatorname{Im} f$, předpokládá se, že nebyl ovlivněn rušením. Takový znak přeneseme do prostoru $\mathbb{Z}_2^n$ prostřednictvím inverzního zobrazení $(f|_{\operatorname{Im} f})^{-1}$ a tím jej dekódujeme. Je-li přijat znak neležící v $\operatorname{Im} f$, usuzujeme, že jde o chybu způsobenou rušením. V takovém případě vyhledáme "nejbližší" správný znak z $\operatorname{Im} f$ (např. podle počtu shodných bitů) a poté postupujeme jako předešle. Teorie samoopravných kódů se zabývá výběrem zobrazení f tak, aby při dané úrovni rušení bylo možno co nejspolehlivěji rekonstruovat co největší počet chybně přijatých znaků při minimálním navýšení počtu přenášených bitů.

Příklad. Nechť $m = n + 1$ a $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 1 + x_1 + \dots + x_n)$. Pak

$$\operatorname{Im} f = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \mid y_1 + \dots + y_{n+1} = 1\}.$$

V tomto případě se přidaný bit nazývá paritní bit. Umožňuje detekovat chybu v jednom bitu (nebo jiném lichém počtu bitů), ale neumožňuje ji věrohodně opravit (není známo, který bit byl změněn; po detekci chyby se znak musí odeslat znovu). Chyby na sudém počtu bitů se vzájemně kompenzují a zůstanou neodhaleny.

4. Eukleidovská geometrie

4.1. Definice. *Eukleidovský prostor* je afinní prostor, v jehož zaměření je zadána pozitivně definitní symetrická bilineární forma (tj. skalární součin).

Shrňme základní poznatky, potřebné v dalším výkladu. Skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ označíme $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. *Délka* neboli *norma* vektoru $\mathbf{v}$ je definována vztahem

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Vektor $\mathbf{v}$ se nazývá *normovaný*, platí-li $\|\mathbf{v}\| = 1$. *Normování* je přiřazení $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Vektor $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ je násobek vektoru $\mathbf{v}$ a je normovaný (druhá možnost $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ se nevyužívá).

4.2. Poznámka. Skalární součin lze zrekonstruovat z délek vektorů: Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektory, pak

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}$$

Tudíž,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\,(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

Předpokládejme, že $\mathcal{E}$ je eukleidovský prostor. *Vzdálenost* dvou bodů $A, B \in \mathcal{E}$ definujeme vztahem

$$d(A, B) = \|B - A\|.$$

4.3. Tvrzení. *Eukleidovský prostor je metrickým prostorem s metrikou d:*
(i) $d(A, B) = d(B, A)$*;*
(ii) $d(A, B) \geq 0$*, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když* $A = B$*;*
(iii) *platí trojúhelníková nerovnost* $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$*.*

Důkaz. Tvrzení (i) a (ii) jsou zřejmá. Trojúhelníková nerovnost (iii) je snadným důsledkem nerovnosti $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, která se dokazuje v lineární algebře.

Připomeňme formule pro počítání v souřadnicích. V bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je skalární součin zadán maticí

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix},$$

čili $g_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$. Nazývá se *Gramova matice*. Pro vektory $\mathbf{v} = \sum v^i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{w} = \sum w^j \mathbf{u}_j$ pak platí vztah

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{ij} g_{ij} v^i w^j. \tag{5}$$

Vektory $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se nazývají *kolmé* čili *ortogonální*, jestliže $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, což zapisujeme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. *Ortonormální báze* vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je taková báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, že platí $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, kde $\delta_{ii} = 1$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ (tzv. Kroneckerovo delta). Ekvivalentně řečeno, Gramova matice v ortonormální bázi je jednotková matice a platí

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u^i v^i.$$

Souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou rovny skalárním součinům $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{v} = \sum_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i.$$

(Dokažte jako cvičení.)

Ortogonální doplněk vektorového podprostoru $\mathbf{U}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je vektorový podprostor

$$\mathbf{U}^\perp = \big\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \underset{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}{\forall} \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\big\}$$

Je známo, že $\mathbf{V}$ je přímým součtem $\mathbf{U}$ a $\mathbf{U}^\perp$, a proto má každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ jednoznačně určený rozklad

$$\mathbf{v} = \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} + \mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}}\mathbf{v}$$

na sčítance $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ a $\mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp$. Dostáváme lineární zobrazaní

$$\mathrm{P}_{\mathbf{U}} : \mathbf{V} \to \mathbf{U},$$
$$\mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}^\perp,$$

která se nazývají *kolmá* čili *ortogonální projekce*. Přitom $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \perp \mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}}\mathbf{v}$, a proto

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|^2 + \|\mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|^2.$$

4.4. Tvrzení. *Kolmá projekce vektoru* $\mathbf{v}$ *do podprostoru* $\mathbf{U}$ *s bazí* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *(ne nutně ortonormální) je rovna*

$$\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \frac{\Delta_1}{\Delta}\mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta}\mathbf{u}_n,$$

kde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{vmatrix},$$

je determinant Gramovy matice a

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_{i-1} & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_{i+1} & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_{i-1} & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v} & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_{i+1} & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Označme ještě $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ libovolnou bázi doplňku $\mathbf{U}^\perp$. Máme

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n + b_1\mathbf{w}_1 + \dots + b_m\mathbf{w}_m.$$

Vynásobíme-li tento vztah po řadě vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, dostaneme

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n,$$
$$\dots,$$
$$\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n.$$

Matice této soustavy lineárních rovnic je rovna Gramově matici báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, a proto je nesingulární. Proto můžeme neznámé $a_1, \ldots, a_n$ vypočíst pomocí Kramerova pravidla. Dosadíme-li vypočtené hodnoty do vztahu $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$, obdržíme právě dokazovaný vztah.

Obzvlášť jednoduchý vzorec pro kolmou projekci obdržíme v ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ podprostoru $\mathbf{U}$:

$$\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_n.$$

Odchylka $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektorů $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se definuje jako reálné číslo z intervalu $[0, \pi]$ známou formulí

$$\cos\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Existence čísla $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ plyne z Cauchyho nerovnosti $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$. Vidíme, že vektory $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ jsou *kolmé*, jestliže $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, tj. když $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi/2$.

Cvičení. 1. Ukažte, že odchylka vektorů se nezmění, vynásobíme-li je libovolnými kladnými čísly: $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(a\mathbf{u}, b\mathbf{v})$, kdykoliv $a > 0$, $b > 0$.

2. Ukažte, že $\phi(-\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi - \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

4.5. Tvrzení. *Množina všech normovaných vektorů eukleidovského prostoru je metrickým prostorem s metrikou ϕ:*

(i) $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$*;*

(ii) $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$*, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$*;*

(iii) *platí trojúhelníková nerovnost* $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \geq \phi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$. *Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory lineárně závislé.*

Důkaz. Tvrzení (i) je zřejmé. Tvrzení (ii) plyne z podmínky pro rovnost v Cauchyho nerovnosti. Dokažme trojúhelníkovou nerovnost (iii). Označme $\alpha = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\beta = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\gamma = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

V případě, že jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ lineárně závislé, leží v rovině a platí rovnost (dokažte jako cvičení) Zbývá případ, kdy jsou lineárně nezávislé. Doplňme je do báze a zkonstruujme Gramovu matici. Podle Sylvesterova kriteria jsou hlavní minory Gramovy matice kladné, zejména minor odpovídající vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Poněvadž $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 1$, dostáváme

$$\begin{aligned} &1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &\quad = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Tuto nerovnost můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)^2 \\ &= \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)^2 \\ &= (\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) \\ &= (-\cos(\alpha + \beta) + \cos\gamma)(\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma). \end{aligned}$$

Protože funkce kosinus je na intervalu $[0,\pi]$ monotonní, nastává jedna z možností

$$\alpha-\beta<\gamma<\alpha+\beta,$$
$$\alpha-\beta>\gamma>\alpha+\beta.$$

Pro $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$ může nastat jen první varianta. Odtud trojúhelníková nerovnost.

4.6. Poznámka. Ve speciální teorii relativity je rychlost světla c konstantní. *Interval* mezi událostí o časoprostorových souřadnicích x_1,y_1,z_1,t_1 a událostí o časoprostorových souřadnicích x_2,y_2,z_2,t_2 je podle definice roven

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2.$$

Při přechodu k jiné (pohybující se) inerciální soustavě se interval mezi událostmi zachovává. Trojrozměrné délky a odchylky invariantní nejsou a při při přechodu k jiné (pohybující se) inerciální soustavě podléhají Lorentzově transformaci. Minkowského časoprostor je příkladem afinního prostoru, v jehož zaměření je dána bilineární forma, která ale není pozitivně definitní.

5. Shodnosti v eukleidovském prostoru

Shodnost je afinní zobrazení $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, $\mathbf{f}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ takové, že vektorová složka $\mathbf{f}$ zachovává skalární součin:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Shodnost $\mathbf{f}$ zachovává normu i odchylku vektorů:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u})\|^2=\mathbf{f}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{u})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|^2,$$
$$\cos\phi(\mathbf{f}(\mathbf{u}),\mathbf{f}(\mathbf{v}))=\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{f}(\mathbf{u})\|\,\|\mathbf{f}(\mathbf{v})\|}=\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}=\cos\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Pro rozpoznání shodnosti stačí znát matici vzhledem k některé ortonormální bázi.

5.1. Tvrzení. *Buď $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, $\mathbf{f}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ afinní zobrazení. Buď $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ ortonormální báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Buď F matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, čili*

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)=\sum_i F^i_j\mathbf{e}_i.$$

Pak je zobrazení f shodnost právě tehdy, když F je ortogonální matice, čili

$$F^\top F=FF^\top=E,$$

kde exponent $\top$ označuje transponování a E je jednotková matice.

Důkaz. Je-li f shodnost, pak jsou vektory $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1),\dots,\mathbf{f}(\mathbf{e}_n)$ ortonormální, a proto

$$\delta_{jl}=\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{f}(\mathbf{e}_l)=\sum_i F^i_j\mathbf{e}_i\cdot\sum_k F^k_j\mathbf{e}_k=\sum_{i,k}F^i_jF^k_l\delta_{ik}=\sum_i F^i_jF^i_l.$$

Odtud $F^\top F=FF^\top=E$.

Naopak, je-li F ortogonální matice, pak pro vektory $\mathbf{u} = \sum_j u^j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{v} = \sum_l v^l \mathbf{e}_l$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \sum_j u^j \mathbf{f}(\mathbf{e}_j) \cdot \sum_l v^l \mathbf{f}(\mathbf{e}_l) = \sum_{j,i} u^j F^i_j \mathbf{e}_i \cdot \sum_{l,k} v^l F^k_j \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{j,i,l} u^j v^l F^i_j F^i_j = \sum_{j,l} u^j v^l \delta_{jl} = \sum_j u^j \mathbf{e}_j \cdot \sum_l v^l \mathbf{e}_l = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},\end{aligned}$$

což se mělo dokázat.

Jelikož $\det(F^\top F) = \det F^\top \det F = (\det F)^2$, dostáváme

5.2. Důsledek. *Buď* $\mathbf{f}$ *shodnost, buď* F *její matice vzhledem k některé ortogonální bázi. Pak* $\det F = \pm 1$.

Připomeňme ještě, že komponenty matice F snadno získáme jako skalární součiny

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \sum_i F^i_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_i F^i_j \delta_{ik} = F^k_j.$$

5.1. Vzdálenosti podprostorů

5.3. Definice. *Vzdálenost podmnožin* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$ definujeme vztahem

$$d(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \inf_{\substack{P \in \mathcal{B} \\ Q \in \mathcal{C}}} d(P, Q).$$

V obecném případě infimum nemusí být minimem (v množinách $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ nemusí existovat body B, C, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti množin $\mathcal{B}, \mathcal{C}$).

Příklad. V případě dvou disjunktních otevřených kruhů $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ o vzdálenosti v neexistují body $P \in \mathcal{B}$, $Q \in \mathcal{C}$ o vzdálenosti v a infimum vzdáleností není minimem.

V případě, že $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou afinní podprostory, je infimum z definice vzdálenosti vždy minimem. Jinak řečeno, existují body $P \in \mathcal{B}$, $Q \in \mathcal{C}$, na nichž se dosahuje minima vzdáleností $d(P, Q)$.

Jak body P, Q najdeme? Lidová moudrost praví, že vzdálenost se měří na kolmici. V případě podprostorů eukleidovského prostoru lze takové tvrzení přesně zformulovat a dokázat. Nejdříve pojednáme o speciálním případu, kdy jeden z podprostorů je bod. Jde tedy o vzdálenost bodu od podprostoru.

5.4. Tvrzení. *Buď* $A \in \mathcal{A}$ *bod a* $B + \mathbf{U}$ *podprostor eukleidovského prostoru* $\mathcal{E}$.

(i) *Pak existuje právě jeden bod* $Q \in B + \mathbf{U}$ *takový, že vektor* $A - Q$ *leží v ortogonálním doplňku* $\mathbf{U}^\perp$.

(ii) *Platí* $A - Q = \mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}}(A - B)$.

(iii) *Vzdálenost* $d(A, B + \mathbf{U})$ *je rovna vzdálenosti* $d(A, Q) = \|A - Q\| = \|\mathrm{P}^\perp_{\mathbf{U}}(A - B)\|$.

Bod Q z předchozího tvrzení se nazývá *kolmý průmět* bodu A do podprostoru $B + \mathbf{U}$.

Důkaz. (i) Podmínku, že vektor $A - Q$ leží v ortogonálním doplňku $\mathbf{U}^\perp$, lze ekvivalentně zapsat jako $Q \in A + \mathbf{U}^\perp$. To ovšem znamená, že Q leží v průniku $(B + \mathbf{U}) \cap (A + \mathbf{U}^\perp)$. Tento průnik je neprázdný podle kriteria 3.9, protože $\mathbf{U} + \mathbf{U}^\perp$ je celé zaměření prostoru $\mathcal{E}$. Zaměření průniku je potom $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{0\}$, tudíž průnikem je jediný bod.

(ii) Uvědomíme-li si, že $A - B = (A - Q) + (Q - B)$, kde $A - Q \in \mathbf{U}^{\perp}$ a $Q - B \in \mathbf{U}$, je tvrzení zřejmé.

(iii) Protože bod B lze v podprostoru $\mathcal{B}$ volit libovolně, stačí ukázat, že $d(A, B) \geq d(A, Q)$. Z pravoúhlosti trojúhelníka AQB ale plyne $\|B - A\|^2 = \|B - Q\|^2 + \|Q - A\|^2 \geq \|Q - A\|^2$; odtud tvrzení.

Nyní se můžeme vrátit k případu dvou podprostorů.

5.5. Tvrzení. *Buďte $A + \mathbf{U}$ a $B + \mathbf{V}$ podprostory eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$.*

(i) *Pak existují body $P \in A+\mathbf{U}$ a $Q \in B+\mathbf{V}$ takové, že vektor $P-Q$ je kolmý k podprostoru $\mathbf{U} + \mathbf{V}$, a tedy k oběma podprostorům $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$.*

(ii) *Vektor $P-Q$ je kolmou projekcí $\mathrm{P}^{\perp}_{\mathbf{U}+\mathbf{V}}(A-B)$ vektoru $A-B$ do podprostoru $(\mathbf{U}+\mathbf{V})^{\perp}$.*

(iii) *Vzdálenost $d(A + \mathbf{U}, B + \mathbf{V})$ je rovna délce vektoru $P - Q$, tj.*

$$d(A + \mathbf{U}, B + \mathbf{V}) = \|\mathrm{P}^{\perp}_{\mathbf{U}+\mathbf{V}}(A - B)\|.$$

Důkaz je obtížnější než u speciálního případu s jedním bodem, protože body P, Q nemusí být určeny jednoznačně, jak ukazuje příklad rovnoběžných podprostorů.

Důkaz. (i) Nejdříve probereme případ $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, kdy jsou zaměření obou podprostorů stejná. Pokud navíc $B - A \in \mathbf{U}$, jsou oba podprostory shodné a stačí položit $P = Q$. Pokud naopak $B - A \notin \mathbf{U}$, označme $\mathbf{W} = \mathbf{U}^{\perp} \cap (\mathbf{U} + [\![B - A]\!])$. Podle známého tvrzení o dimenzích průniku a součtu podprostorů máme $\dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{U}^{\perp} + \dim(\mathbf{U} + [\![B - A]\!]) - \dim(\mathbf{U}^{\perp} + \mathbf{U} + [\![B - A]\!]) = (n - k) + (k + 1) - n = 1$, kde jsme označili $n = \dim \mathcal{E}$, $k = \dim \mathbf{U}$. Vybereme-li $P \in A + \mathbf{U}$ libovolně, stačí určit Q jako průnik přímky $P + \mathbf{W}$ a druhého podprostoru $B + \mathbf{U}$. Dokažte sami, že průnik existuje podle kriteria 3.9, sestává z jediného bodu a vektor $Q - P$ je kolmý k $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$.

Přejděme k obecnému případu $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$. Podle kriteria 3.9 existuje neprázdný průnik $\mathcal{P}$ podprostorů $A + \mathbf{U} + (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}$ a $B + \mathbf{V}$ a má zaměření

$$[\mathbf{U} + (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}] \cap \mathbf{V} = \mathbf{U} \cap \mathbf{V}. \tag{6}$$

Tuto rovnost je nutno dokázat. Zřejmá je nerovnost $[\mathbf{U} + (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}] \cap \mathbf{V} \supseteq \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Abychom dokázali nerovnost opačnou, uvažujme o libovolném vektoru $\mathbf{u}$ náležejícím množině na levé straně. Můžeme psát $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$, $\mathbf{u}_2 \in (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}$ a zároveň $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$. Podle těchto předpokladů $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ a také $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \perp \mathbf{u}_2$, načež $0 = \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2$. Odtud $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, a tedy $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Tím je důkaz rovnosti (6) ukončen.

Ze symetrie úlohy plyne, že i $A + \mathbf{U}$ a $B + \mathbf{V} + (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}$ se protínají a jejich průnik $\mathcal{Q}$ má stejné zaměření $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Majíce stejná zaměření, průniky $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ splňují předpoklady již dokázané části tvrzení (i). Tudíž, existují body $P \in \mathcal{P}$ a $Q \in \mathcal{Q}$ takové, že

$$Q - P \in (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^{\perp}.$$

Dále, z konstrukce podprostoru $\mathcal{P}$ vyplývá, že

$$Q - P = (Q - A) - (P - A) \in \mathbf{U} + (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}$$

a analogicky z konstrukce podprostoru $\mathcal{Q}$ vyplývá, že

$$Q - P = (Q - B) - (P - B) \in \mathbf{V} + (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}.$$

Nyní již lze vyvodit požadovaný vztah $Q - P \in (\mathbf{U} + \mathbf{V})^{\perp}$. Podle posledních dvou formulí totiž můžeme psát $Q - P = \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$, kde $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a oba zbývající prvky $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ náleží

$(\mathbf{U}+\mathbf{V})^\perp$. Pak ovšem $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{v}'-\mathbf{u}'$ náleží jak součtu $\mathbf{U}+\mathbf{V}$, tak jeho doplňku $(\mathbf{U}+\mathbf{V})^\perp$, a tedy $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{v}'-\mathbf{u}'=\mathbf{0}$, načež $\mathbf{u}=\mathbf{v}\in\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$.

Dále budeme postupovat podobně jako při důkazu rovnosti (6). Shrneme-li zatím získané výsledky, máme $Q-P=\mathbf{u}+\mathbf{u}'\in(\mathbf{U}\cap\mathbf{V})^\perp$, kde $\mathbf{u}\in\mathbf{U}\cap\mathbf{V}$ a $\mathbf{u}'\in(\mathbf{U}+\mathbf{V})^\perp$. Snadno nahlédneme, že $\mathbf{u}\perp\mathbf{u}'$ a současně $\mathbf{u}\perp(\mathbf{u}+\mathbf{u}')$, načež $0=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{u}')=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. Odtud $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, a tedy $Q-P=\mathbf{u}'\in(\mathbf{U}+\mathbf{V})^\perp$, což se mělo dokázat.

Části (ii) a (iii) se dokáží podobně jako u předchozího tvrzení.

6. Orientovaný objem

V této kapitole zavedeme orientovaný objem rovnoběžnostěnu v eukleidovském prostoru a ukážeme, že existuje souvislost mezi orientovaným objemem rovnoběžnostěnu a determinantem.

Buď Q bod a $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ lineárně nezávislé vektory. *Rovnoběžnostěn* určený vrcholem Q a vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ definujeme jako množinu

$$\{P+t_1\mathbf{v}_1+\dots+t_n\mathbf{v}_n \mid 0\le t_1\le 1,\dots,0\le t_n\le 1\}.$$

Jde tedy o množinu bodů afinního prostoru, jejichž všechny souřadnice vzhledem k afinní souřadné soustavě $Q,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ leží v uzavřeném intervalu $[0,1]$. Rovnoběžnostěn určený ortonormální bazí se nazývá *jednotková krychle.*

6.1. Definice. *Orientovaná báze* vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je uspořádaná $n$tice $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ taková, že vektory $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$. Orientované báze $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n)$ nazýváme *souhlasně orientované*, pokud má matice přechodu mezi oběma bázemi kladný determinant; jinak je nazýváme *nesouhlasně orientované.*

Souhlasná orientovanost je relace ekvivalence na množině všech orientovaných bazí prostoru $\mathbf{V}$. Má právě dvě třídy rozkladu. Zvolíme-li pevně nějakou bázi, pak jedna třída je tvořena bazemi souhlasně orientovanými a druhá je tvořena bazemi nesouhlasně orientovanými se zvolenou bazí. Bývá zvykem vybrat některou bázi a všechny báze s ní souhlasně resp. nesouhlasně orientované nazvat *kladně* resp. *záporně* orientované báze.

6.2. Definice. *Orientovaný vektorový prostor* je vektorový prostor, v němž je zvolena jedna ze dvou tříd souhlasně orientovaných bazí. Báze této třídy se nazývají *kladné*, zbývající se nazývají *záporné.*

Příklad. Třírozměrný prostor, který obýváme, můžeme orientovat pravidlem pravé (nebo levé) ruky. Lze-li umístit palec, ukazováček a prostředníček pravé resp. levé ruky podél vektorů $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, pak řekneme, že báze $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ je kladně resp. záporně orientovaná.

Zvolme nějakou kladnou ortonormální bázi $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Rovnoběžnostěnu určenému bodem Q a vektory $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ přiřadíme reálné číslo $\Omega(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, zvané *orientovaný objem*, podle následujícího pravidla: Nechť V je matice přechodu od báze $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$; položíme

$$\Omega(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=\det V.$$

Je zřejmé, že orientovaný objem nezávisí na umístění (volbě vrcholu) rovnoběžnostěnu; proto vrchol Q schází mezi argumenty.

Připomeňme, že složka V^i_j matice V je rovna $i$té kartézské souřadnici vektoru $\mathbf{v}_j$; platí tedy $\mathbf{v}_j=\sum_i V^i_j\mathbf{e}_i$.

V případě, že jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé (nejde o rovnoběžnostěn), definujeme $\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$ (v tomto případě je matice V singulární).

6.3. Tvrzení. *Orientovaný objem rovnoběžnostěnu nezávisí na volbě kladné ortonormální báze* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Důkaz. Uvažujme o rovnoběžnostěnu určeném vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Buďte dány kladně orientované ortonormální báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$. Označme Q příslušnou matici přechodu; máme tedy

$$\mathbf{e}'_j = \sum_k Q_j^k \mathbf{e}_k$$

a také

$$\det Q = 1.$$

Nechť V resp. V' označuje matici přechodu od báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ resp. $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Potom

$$\sum_k V_i^k \mathbf{e}_k = \mathbf{v}_i = \sum_j V_i'^j \mathbf{e}'_j = \sum_{k,j} V_i'^j Q_j^k \mathbf{e}_k$$

a porovnáním koeficientů u $\mathbf{e}_k$ dostáváme

$$V_i^k = \sum_j V_i'^j Q_j^k,$$

čili

$$V = V'Q.$$

Odtud

$$\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det V = \det V' \det Q = \det V' = \Omega'(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Cvičení. Dokažte, že orientovaný objem jednotkové krychle určené ortonormální bazí je roven 1 je-li báze kladně orientována a -1, je-li báze záporně orientována.

Cvičení. Dokažte, že pro jednorozměrný orientovaný objem platí $\Omega(\mathbf{u}) = \pm\|\mathbf{u}\|$. Jak se určí znaménko?

Mezi další vlastnosti orientovaného objemu patří zejména následující:

6.4. Tvrzení. *Platí*

1. $$\Omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|}\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n);$$

Zde σ je libovolná permutace a $(-1)^{|\sigma|}$ je její znaménko. Důsledek: Orientovaný objem $\Omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ změní znaménko, pokud si dva vektory vymění místo.

2. $$\Omega_k(c_1\mathbf{u}_1, \dots, c_k\mathbf{u}_k) = c_1 \cdots c_k \Omega_k(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$$

pro libovolné skaláry $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Důsledek: Při c-násobném prodloužení některé hrany rovnoběžnostěnu se jeho orientovaný objem c-násobně zvětší.

3. $$\Omega_k(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_k) = \Omega_k\left(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k\right).$$

Důsledek: Zkosení zachovává orientovaný objem rovnoběžnostěnu (zkosením rozumíme, že se k jedné hraně přičte lineární kombinace ostatních hran).

4. $\Omega(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) + \Omega(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1$ *a* $\mathbf{v}'_1$ *závislé, tvrzení vyjadřuje aditivitu objemu (je-li sjednocení disjunktních rovnoběžnostěnů opět rovnoběžnostěn, pak jeho objem je roven součtu objemů jednotlivých rovnoběžnostěnů).*

Důkaz. Tvrzení bezprostředně vyplývají ze známých vlastností determinantu.

Cvičení. Co je Cavalieriho princip? Jak souvisí s třetím tvrzením?

Neorientovaný objem definujeme jako absolutní hodnotu $|\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)|$ orientovaného objemu. Je zřejmé, že čtvrté tvrzení nemá analogii pro neorientované objemy.

Existuje souvislost mezi objemem a determinantem Gramovy matice.

6.5. Tvrzení. *Platí*

$$\Omega_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^2 = \det G,$$

kde G je Gramova matice skalárního součinu vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Důkaz. Podle definice $G_{kl} = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_l$. Je-li $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortonormální báze a $v_k^1, \dots, v_k^n$ resp. $v_l^1, \dots, v_l^n$ kartézské souřadnice vektorů $\mathbf{v}_k$ resp. $\mathbf{v}_l$, pak dostáváme

$$G_{kl} = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_l = \Big(\sum_i v_k^i \mathbf{e}_i\Big) \cdot \Big(\sum_j v_l^j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{i,j} v_k^i v_l^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i,j} v_k^i v_l^j \delta_{ij}.$$

Odtud $G = VV^\top$, a tedy $\det G = \det V^2 = \Omega_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^2$.

Je-li $\mathbf{V}$ orientovaný prostor a $\mathbf{U} \subsetneq \mathbf{V}$ jeho podprostor, pak $\mathbf{U}$ nemá žádnou indukovanou orientaci. Existuje však vazba mezi orientací $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ a $\mathbf{U}^\perp$: Je-li $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ orientovaná báze podprostoru $\mathbf{U}$ a $\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ orientovaná báze jeho doplňku $\mathbf{U}^\perp$, pak $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ je orientovaná báze prostoru $\mathbf{V}$.

6.6. Tvrzení. *Pro $n > 1$ platí*

$$|\Omega_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)| = |\Omega_{n-1}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1})| \, \|\mathrm{P}^\perp_{[\![\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}]\!]} \mathbf{u}_n\|.$$

Význam: Objem rovnoběžnostěnu je objem základny krát výška.

Důkaz. V základně generované vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$ zvolíme ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ a doplníme ji do báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n$. Ve vyjádření $\mathbf{u}_j = U_j^i \mathbf{e}_i$ pak máme $U_j^n = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{e}_n = 0$ pro $j = 1, \dots, n-1$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Omega_n(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) &= \begin{vmatrix} U_1^1 & \cdots & U_{n-1}^1 & U_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_1^{n-1} & \cdots & U_{n-1}^{n-1} & U_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & U_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1^1 & \cdots & U_{n-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ U_1^{n-1} & \cdots & U_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} U_n^n \\
&= \pm \Omega_{n-1}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}) \, U_n^n \\
&= \pm \Omega_{n-1}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}) \, \|\mathrm{P}^\perp_{[\![\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}]\!]} \mathbf{u}_n\|,
\end{aligned}$$

protože $\|\mathrm{P}^\perp_{[\![\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}]\!]} \mathbf{u}_n\| = \|\mathrm{P}^\perp_{[\![\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}]\!]} \mathbf{u}_n\| = \|\mathrm{P}_{[\![\mathbf{e}_n]\!]} \mathbf{u}_n\| = \|(\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{e}_n) \, \mathbf{e}_n\| = |\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{e}_n| \, \|\mathbf{e}_n\| = |\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{e}_n| = |U_n^n|$.

Cvičení. Ukažte, že pro odchylku $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$ platí

$$\operatorname{tg}\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\Omega_2(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}.$$

6.1. Odchylky podprostorů

Odchylku afinních podprostorů definujeme jako odchylku jejich zaměření. Omezíme se proto na případ vektorů a vektorových podprostorů.

6.7. Definice. *Odchylka vektoru* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *a vektorového podprostoru* $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ se definuje jako

$$\phi(\mathbf{v},\mathbf{U}) = \inf_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}\setminus\mathbf{0}} \phi(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

Podobně jako v případě vzdálenosti jde ve skutečnosti o minimum, ale není to zřejmé. Plyne to až z následujícího tvrzení, díky kterému lze odchylku $\phi(\mathbf{v},\mathbf{U})$ převést na odchylku dvou vektorů:

6.8. Tvrzení. (i) *Odchylka* $\phi(\mathbf{v},\mathbf{U})$ *vektoru* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *od podprostoru* $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ *je rovna* $\pi/2$ *právě tehdy, když* $\mathbf{v}$ *má nulovou projekci* $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}$ *do* $\mathbf{U}$.

(ii) *Jestliže* $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *pak*

$$\phi(\mathbf{v},\mathbf{U}) = \phi(\mathbf{v},\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}) < \tfrac{1}{2}\,\pi.$$

(iii) *Platí*

$$\phi(\mathbf{v},\mathbf{U}) = \arccos\frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že odchylka, pokud existuje, je vždy z intervalu $[0,\pi/2]$. Je-li totiž minima dosaženo na nějakém vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, pak pro opačný vektor $-\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ platí $\cos\phi(-\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\cos\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$, a tedy $\phi(-\mathbf{u},\mathbf{v}) = \pi - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$, načež platí $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \pi/2$ nebo $\phi(-\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \pi/2$.

V případě odchylky $\pi/2$ pak nutně $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, načež $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^{\perp}$, a tedy $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Zřejmě platí i opačná implikace, což dokazuje první část tvrzení a příslušnou část třetího.

Předpokládejme nyní, že $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Hledejme nejmenší možnou odchylku, kterou mohou mít vektor $\mathbf{v}$ a libovolný nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Především platí

$$\cos\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot(\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} + \mathrm{P}^{\perp}_{\mathbf{U}}\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

protože $\mathbf{u} \perp \mathrm{P}^{\perp}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}$ (proč?). Pokračujme dále:

$$\cos\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}\,\frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \cos\phi(\mathbf{u},\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v})\frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}. \tag{7}$$

Protože $\cos\phi(\mathbf{u},\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}) \le 1$, z rovnosti (7) plyne nerovnost

$$\cos\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Při volbě $\mathbf{u} = \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}$ ale obdržíme rovnost, protože pak $\cos\phi(\mathbf{u}, \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}) = \cos\phi(\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}, \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}) = 1$. Odtud

$$\frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}\setminus 0} \cos\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Protože funkce kosinus je na intervalu $[0, \pi/2]$ klesající, plyne odtud

$$\arccos\frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \inf_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}\setminus 0} \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Tím je dokázáno (iii) a potažmo i (ii).

Cvičení. Dokažte vztah

$$\cos\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cos\phi(\mathbf{u}, \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}) \cos\phi(\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

který vyjadřuje odchylku vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ od $\mathbf{v}$ pomocí odchylky $\mathbf{u}$ od projekce $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}$.

6.9. Definice. *Odchylka podprostorů* $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ takových, že $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$, se definuje jako

$$\phi(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \inf_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{U}\setminus\mathbf{0} \\ \mathbf{v}\in\mathbf{V}\setminus\mathbf{0}}} \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

V případě netriviálního průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ vyjde nulová odchylka (proč?). Přesto i v tomto případě existuje netriviální míra odklonu a má rozumný smysl.

Příklad. Příkladem může být odchylka dvou stěn v kosoúhlé místnosti. Pokud jsou stěny alespoň kolmé k podlaze, můžeme za vhodnou úhlovou míru považovat odchylku přímek ležících v úpatí stěn (tj. průsečnic s podlahou).

6.10. Poznámka. V obecném případě mají prostory $\mathbf{U} \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^\perp$ a $\mathbf{V} \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^\perp$ nulový průnik. Pokud navíc $\mathbf{U} \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^\perp \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{V} \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^\perp \neq \mathbf{0}$, můžeme definovat

$$\phi(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \phi(\mathbf{U} \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^\perp, \mathbf{V} \cap (\mathbf{U} \cap \mathbf{V})^\perp),$$

kde na pravé straně stojí odchylka ve smyslu předchozí definice.

Cvičení. Počítejte všechny možné odchylky hran a stěn (i mezi sebou) u pravidelných mnohostěnů.

Výpočet odchylky dvou podprostorů a důkaz existence minima jsou poněkud složitější než v případě odchylky vektoru a podprostoru. Nicméně, by bylo škoda neuvést alespoň myšlenku, na níž jsou založeny.

Předpokládejme na chvíli, že jsme nalezli nenulové vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, které realizují minimum $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Tatáž hodnota je ovšem rovna $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{V})$ i $\phi(\mathbf{U}, \mathbf{v})$, a tedy i $\phi(\mathbf{u}, \mathrm{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{u})$ a $\phi(\mathbf{v}, \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v})$, jak plyne z tvrzení 6.8(ii) o odchylce vektoru a podprostoru. Můžeme proto dosti oprávněně očekávat, že $\mathrm{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{u} = \mu\mathbf{v}$ a $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$ pro nějaká kladná čísla μ, ν (můžeme to očekávat s jistotou, pokud jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ až na násobek jediné). Pak ovšem $\mathrm{P}_{\mathbf{V}}\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v} = \mu\nu\mathbf{v}$ a podobně $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathrm{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{u} = \mu\nu\mathbf{u}$. Vidíme, že $\mathbf{v}$ je vlastní vektor lineárního zobrazení

$$\mathrm{P}_{\mathbf{V}} \circ \mathrm{P}_{\mathbf{U}}|_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

příslušný vlastní hodnotě $\mu\nu$ a stejně tak $\mathbf{u}$ je vlastní vektor lineárního zobrazení

$$\mathrm{P}_{\mathbf{U}} \circ \mathrm{P}_{\mathbf{V}}|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$$

příslušný téže vlastní hodnotě $\mu\nu$. Podle tvrzení 6.8(iii) navíc

$$\begin{aligned}\cos^2\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \cos\phi(\mathbf{u},\mathrm{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{u})\cos\phi(\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v},\mathbf{v})\\ &= \frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{V}}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}\frac{\|\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mu\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}\frac{\nu\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \mu\nu.\end{aligned}$$

Má-li být odchylka $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ minimální, musí být její kosinus maximální. Tudíž, vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ jsou po řadě vlastní vektory lineárních zobrazení $\mathrm{P}_{\mathbf{V}}\circ\mathrm{P}_{\mathbf{U}}|_{\mathbf{V}}$, $\mathrm{P}_{\mathbf{U}}\circ\mathrm{P}_{\mathbf{V}}|_{\mathbf{U}}$, příslušné jedné a téže maximální vlastní hodnotě, zatímco kosinus odchylky obou prostorů je roven odmocnině z oné hodnoty.

6.11. Poznámka. Hodnoty μ,ν sice nejsou jednoznačně určeny, protože vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ lze vynásobit libovolnými kladnými čísly aniž by se změnila odchylka $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$, ale přitom se nezmění ani součin $\mu\nu$. Vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ jsme také mohli pro určitost například normovat, načež by platilo $\mu=\nu$ (dokažte jako cvičení).

Z výsledků, ke kterým jsme zatím dospěli, lze usoudit na platnost částí (ii) a (iii) následujícího tvrzení. Uvedeme je bez důkazu.

6.12. Tvrzení. *Buďte $\mathbf{U}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{V}\neq\mathbf{0}$ podprostory takové, že $\mathbf{U}\cap\mathbf{V}=\mathbf{0}$. Uvažujme o lineárních zobrazeních*

$$\Pi_{\mathbf{U}} = \mathrm{P}_{\mathbf{U}}\circ\mathrm{P}_{\mathbf{V}}|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U}\to\mathbf{U}, \qquad \Pi_{\mathbf{V}} = \mathrm{P}_{\mathbf{V}}\circ\mathrm{P}_{\mathbf{U}}|_{\mathbf{V}} : \mathbf{V}\to\mathbf{V}.$$

(i) *Lineární zobrazení $\Pi_{\mathbf{U}}$, $\Pi_{\mathbf{V}}$ mají všechny vlastní hodnoty reálné a nezáporné. Vlastní hodnoty obou zobrazení jsou, kromě nulových, shodné včetně násobností.*

(ii) *Kosinus odchylky $\cos\phi(\mathbf{U},\mathbf{V})$ je roven druhé odmocnině z maximální vlastní hodnoty zobrazení $\Pi_{\mathbf{U}}$ nebo, což je totéž, druhé odmocnině z maximální vlastní hodnoty zobrazení $\Pi_{\mathbf{V}}$.*

(iii) *Buďte po řadě $\mathbf{u},\mathbf{v}$ vlastní vektory zobrazení $\Pi_{\mathbf{U}}$, $\Pi_{\mathbf{V}}$, příslušné maximální vlastní hodnotě. Pak $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})=\phi(\mathbf{U},\mathbf{V})$.*

7. 1-formy v konečněrozměrném eukleidovském vektorovém prostoru

Připomeňme, že lineární zobrazení $\phi:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ se nazývá 1-forma. Vektorový prostor všech 1-forem na $\mathbf{V}$ se označuje $\mathbf{V}^*$ a nazývá se *duální prostor* prostoru $\mathbf{V}$.

7.1. Tvrzení. *Buď $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ báze vektorového prostoru V. Pak existují 1-formy $\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n$, jednoznačně určené podmínkou*

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j)=\delta^i_j, \tag{8}$$

kde δ^i_j je Kroneckerovo delta. 1-Formy $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ tvoří bázi duálního prostoru $\mathbf{V}^*$. Přitom souřadnice libovolné 1-formy ϕ v bázi $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ jsou rovny

$$\phi_i=\phi(\mathbf{e}_i). \tag{9}$$

Důkaz. Dokažme existenci 1-forem $\mathbf{e}^i$. Pro libovolný vektor $\mathbf{u}=\sum_i u^i\mathbf{e}_i$ položme

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{u})=u^i.$$

Snadno se ověří, že $\mathbf{e}^i$ jsou lineární zobrazení $\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ a že splňují podmínku (8).

Ověřme jednoznačnost. Nechť 1-forma $\phi^i\in\mathbf{V}^*$ splňuje podmínku (8), tedy $\phi^i(\mathbf{e}_j)=\delta^i_j$. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{u}=\sum_j u^j\mathbf{e}_j$ dostáváme $\phi^i(\mathbf{u})=\phi^i(\sum_j u^j\mathbf{e}_j)=\sum_j u^j\phi^i(\mathbf{e}_j)=\sum_j u^j\delta^i_j=u^i$. Pak ovšem $\phi^i=\mathbf{e}^i$.

Dále ukažme, že 1-formy $\mathbf{e}^i$ jsou generátory prostoru $\mathbf{V}^*$. Pro libovolnou 1-formu ϕ a vektor $\mathbf{u} = \sum_j w^j \mathbf{e}_j$ máme $\phi(\mathbf{u}) = \phi(\sum_j w^j \mathbf{e}_j) = \sum_j w^j \phi(\mathbf{e}_j) = \sum_j \mathbf{e}^j(\mathbf{u})\phi(\mathbf{e}_j)$. Vidíme, že

$$\phi = \sum_j \phi(\mathbf{e}_j)\mathbf{e}^j.$$

Odtud formule (9).

Nakonec ukažme, že formy $\mathbf{e}^i$ jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme, že $\sum_i a_i \mathbf{e}^i = 0$. Dosadíme-li do této rovnosti vektor $\mathbf{e}_j$, obdržíme

$$0 = \sum_i a_i \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \sum_i a_i \delta^i_j = a_j$$

pro každé $j = 1, \dots, n$, čímž je důkaz hotov.

7.2. Důsledek. *Je-li prostor* $\mathbf{V}$ *konečněrozměrný, pak je i duální prostor* $\mathbf{V}^*$ *konečněrozměrný a platí* $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}^*$.

Je-li, jak jsme právě viděli, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}^*$, pak jsou prostory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}^*$ izomorfní. Nicméně, skalární součin nám umožňuje jednu bijekci mezi 1-formami a vektory přímo popsat.

7.3. Lemma. *Buď* $\mathbf{V}$ *konečněrozměrný vektorový prostor. Pak je zobrazení* $\flat : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$, *definované předpisem*

$$\flat(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \tag{10}$$

izomorfismus vektorových prostorů.

Zápis $\flat(\mathbf{v})(\mathbf{u})$ na levé straně se dešifruje jako dosazení vektoru $\mathbf{u}$ do 1-formy $\flat(\mathbf{v})$.

7.4. Důkaz. Zobrazení $\flat$ je zřejmě lineární. Ukažme, že $\flat$ je injektivní. Buďte $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ dva vektory a předpokládejme, že $\flat(\mathbf{v}) = \flat(\mathbf{v}')$. Potom pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ platí $\flat(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = \flat(\mathbf{v}')(\mathbf{u})$, a tedy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$, čili $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}') = 0$. To platí zejména pro vektor $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, což znamená, že $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}') = 0$, a tedy $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = 0$, čili $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

Prostory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{V}^*$ však mají shodnou dimenzi n, a proto $\dim \operatorname{Im} \flat = \dim \mathbf{V} - \dim \operatorname{Ker} \flat = n - 0 = n = \dim \mathbf{V}^*$. Vidíme, že $\flat$ je surjektivní a potažmo i bijektivní.

7.5. Tvrzení. *V souřadnicích*

$$\flat(\mathbf{v})_i = \sum_j g_{ij} v^j, \tag{11}$$

kde g_{ij} *je Gramova matice.*

7.6. Důkaz. Pro libovolný vektor $\mathbf{v} = \sum_j v^j \mathbf{e}_j$ snadno obdržíme s použitím vztahů (9), (10) potřebnou rovnost

$$\flat(\mathbf{v})_i = \flat(\mathbf{v})(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \sum_j v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_j v^j g_{ij}.$$

Inverzní zobrazení k $\flat : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ označíme $\sharp : \mathbf{V}^* \to \mathbf{V}$.

7.7. Tvrzení. *V souřadnicích*

$$\sharp(\phi)^i = \sum_j g^{ij}\phi_j, \tag{12}$$

kde g^{ij} je matice inverzní ke Gramově matici g_{ij}.

7.8. Důkaz. Označme $\sharp(\phi) = \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} = \sum_i u^i \mathbf{e}_i$. Pak $\phi = \flat(\mathbf{u})$, načež $\phi_j = \flat(\mathbf{u})_j = \sum_i g_{jk}u^k$ podle formule (11). Nyní $\sum_j g^{ij}\phi_j = \sum_{i,j} g^{ij}g_{jk}u^k = \sum_i \delta^i_k u^k = u^i = \sharp(\phi)^i$, což se mělo dokázat.

7.9. Poznámka. Označení $\flat$ a $\sharp$ se snadno pamatuje. Vektory mají souřadnice s indexy nahoře a 1-formy mají souřadnice s indexy dole. Proto můžeme říci, že $\flat$, který převádí vektory na 1-formy, index snižuje a $\sharp$, který převádí 1-formy na vektory, index zvedá.

7.10. Poznámka. Je-li skalární součin pevně zvolen, můžeme vektor a jemu odpovídající 1-formu ztotožnit, to jest, považovat oba za jeden objekt a označit jej jediným symbolem. Souřadnice píšeme jednou s indexy nahoře a jednou s indexy dole, podle toho, zda objekt právě vystupuje v roli vektoru nebo v roli 1-formy. Symboly $\flat$ a $\sharp$ se potom také vynechávají a formule (11) a (12) mají podobu

$$v_i = \sum_j g_{ij}v^j, \quad \phi^i = \sum_j g^{ij}\phi_j.$$

Takový postup je obvyklý zejména ve fyzikální literatuře.

7.11. Poznámka. Jediné vlastnosti skalárního součinu, které jsme využili, byly bilinearita a nesingulárnost. Analogickou konstrukci lze provést s kteroukoliv nesingulární bilineární formou, tedy i nesymetrickou.

8. Trojrozměrný eukleidovský prostor a vektorový součin

Trojrozměrný eukleidovský prostor je výjimečný tím, že připouští ještě jednu významnou binární operaci – vektorový součin.

Orientovaný objem $\Omega = \Omega_3$ v orientovaném eukleidovském vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze 3 jsme zavedli jako jisté zobrazení, lineární v každém argumentu (trilineární). Buďte zadány dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Uvažujme o 1-formě $\phi_{\mathbf{u},\mathbf{v}} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$\phi_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

8.1. Definice. Vektor $\sharp\phi_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ označíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Nazývá se vektorový součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Definici můžeme stručně shrnout tak, že pro každou trojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ platí

$$\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

a vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je touto identitou jednoznačně určen.

Vektorový součin je zřejmě antikomutativní,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u},$$

protože $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$. Speciálně,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Platí též

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Vektorový součin je lineární v obou argumentech,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$
$$\mathbf{u} \times (c\mathbf{v}) = c\mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

protože Ω je trilineární a $\sharp$ je lineární.

Bilinearita umožňuje pohodlné počítání vektorového součinu v kartézských souřadnicích. Buď $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ kladná ortonormální báze. Jsou-li u^i, v^i souřadnice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, pak

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_i u^i \mathbf{e}_i\right) \times \left(\sum_j v^j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,j} u^i v^j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$$

Zbývá spočítat součiny $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$. Již víme, že $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$. Pak platí

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = \Omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0,$$
$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = \Omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0,$$
$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \Omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1.$$

Odtud první z rovností

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

a ostatní se dokáží podobně. Po dosazení do vztahu $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i,j} u^i v^j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ obdržíme formuli, kterou lze symbolicky zapsat ve tvaru determinantu:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}.$$

Vektorový součin není asociativní:

8.2. Tvrzení (Lagrangeova formule). *Platí*

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}.$$

Důkaz. Lagrangeovu formuli snadno ověříme pro $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_k$ při libovolné volbě trojice indexů i, j, k. Platnost pro obecné vektory pak plyne z linearity.

8.3. Důsledek (Jacobiho identita).

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Cvičení. Buďte $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ dva vektory. Nechť $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$. Ukažte, že potom $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Cvičení. Buďte $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ dva vektory. Ukažte, že z existence vektoru $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ takového, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, plyne $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Cvičení. 1. Dokažte, že

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pokud jsou } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ lineárně závislé} \\ \Omega_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathbf{n} & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\Omega_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je obsah rovnoběžníka se stranami $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, načež $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor ležící v doplňku $[\![\mathbf{u}, \mathbf{v}]\!]^{\perp}$ takový, že $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$ je kladná báze.

Vektor $\mathbf{n}$ je v případě lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ určen jednoznačně. Doplněk $[\![\mathbf{u}, \mathbf{v}]\!]^{\perp}$ je totiž jednorozměrný, a proto máme jen dvě možnosti pro $\mathbf{n}$ (druhá je $-\mathbf{n}$), z nichž právě jedna vede ke kladné bázi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$.

2. Dále dokažte, že součinitel $\Omega_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ z definice vektorového součinu je roven $\sin \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \|\mathbf{u}\|\, \|\mathbf{v}\|$.