Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební text z geometrie
M. Marvan

"Jak to narýsoval! Ký to umný plán! Kružnice, přímky, spirály, smyčky ... takového plánu jsem si, otče, vezdy ždál!" jásal mladý tesařík nad počmáraným papírem. "Otče, chutě do práce, nemeškejme podle toho plánu stavěti!"

O. Sekora, Brouk Pytlík

Geometrie nelineárních útvarů

1. Předmluva

Tento učební text k předmětu Geometrie je určen studentům druhého ročníku bakalářského studia Slezské univerzity v Opavě. Druhá část, kterou právě čtete, pojednává o diferenciální geometrii nelineárních útvarů v eukleidovském prostoru. Patří mezi ně zejména křivky a podvariety. Přívlastek 'diferenciální' znamená, že budeme používat diferenciální počet v eukleidovském prostoru. Potřebné základy jsou v textu vyloženy.

Geometrie křivek a podvariet se bohatě využívá například ve fyzice, geografii, architektuře. Příklady a cvičení začleněné do této verze textu to do jisté míry odrážejí, ačkoliv by se pro to dalo udělat mnohem více.

Text zaostává i v tom, že v něm zcela chybí obrázky. Studentům doporučuji, aby si křivky a podvariety sami vyhledávali v internetu, kde najdou i názorné animace. Některá cvičení takové samostatné vyhledávání přímo předpokládají.

V celém textu je $\mathcal{E}$ eukleidovský prostor se zaměřením $\mathbf{V}$.

2. Geometrie křivek

Netriviální křivky byly v oblibě již u geometrů antického řecka, o čemž mnohdy svědčí jejich názvy.

Cvičení. Jak jsou definovány a k čemu sloužily následující křivky: Archimedova spirála, Dioklova kisoida, Nikomedova konchoida, Hippiova kvadratrix?

Začněme obecnou definicí křivky. Pro lineární útvary (rozuměj afinní podprostory) jsme měli dvojí vyjádření: parametrické a obecné. Podobně je tomu i u nelineárních útvarů. Uvažujme o soustavě rovnic $f_1 = 0, \cdots, f_n = 0$, kde $f_1, \dots, f_n$ jsou funkce na Eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. Taková soustava určuje množinu $\{X \in \mathcal{E} \mid f_1(X) = 0, \dots, f_n(X) = 0\}$. Není však snadné rozhodnout, zda různé soustavy zadávají jednu a tutéž množinu.

Příklad. *Obecná rovnice kružnice*

(a) Rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ zadává v rovině $\mathbb{R}^2$ kružnici se středem v počátku a poloměrem 1.

(b) Rovnice $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 1 = 0$ zadává tutéž kružnici, protože polynom na levé straně je roven $(x^2 + y^2 - 1)^2$.

(c) Rovnice $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 1 = 0$ také zadává tutéž kružnici, protože polynom na levé straně je roven $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$ a rovnice $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nemá reálná řešení.

Uvedený příklad ilustruje příčiny nejednoznačnosti, které se vyskytují již při $n = 1$ (jedna rovnice). Podobné vznikají při $n > 1$, ale mohou být navíc ukryty v různých kombinacích rovnic. Jsou zvládnutelné v případě, že $f_1, \dots, f_n$ jsou polynomy. Množiny zadané v komplexním oboru soustavami polynomiálních rovnic se studují v *algebraické geometrii.*

Příklad. *Parametrická rovnice kružnice*
(i) Kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ lze zadat i parametrickými rovnicemi: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Stejnou kružnici obdržíme, položíme-li $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.
(iii) Stejnou kružnici obdržíme, položíme-li $x = \cos t^2$, $y = \sin t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Jak je vidět, ani parametrické rovnice nejsou zcela jednoznačné, ale s tím si poradíme relativně snadno. V diferenciální geometrii proto vycházíme z parametrických vyjádření.

2.1. Křivky a jejich parametrizace

Křivka v parametrickém vyjádření může být považována za dráhu pohybujícího se bodu. Pohyb se může dít proměnlivou rychlostí, a proto může být jedna a tatáž křivka parametrizována různými způsoby.

2.1. Definice. *Parametrizace* (přesněji *parametrizace křivky*) nebo též *dráha* v $\mathcal{E}$ je diferencovatelné zobrazení $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Analogicky se definuje parametrizace neboli dráha $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbf{V}$ ve vektorovém prostoru.

Bez předpokladu diferencovatelnosti (bude upřesněn níže) se neobejdeme. Existují například spojité křivky, které prochází každým bodem čtverce.

Cvičení. Jak se konstruuje a jaké vlastnosti má Peanova křivka? Hilbertova křivka?

2.2. Definice. Buď $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace ve eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. Množina

$$r(I) = \{r(t) \mid t \in I\}$$

se nazývá *křivka* v $\mathcal{E}$. Analogicky se definuje křivka ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$.

2.3. Definice. *Jednoduchá křivka* je křivka, ktará má injektivní parametrizaci $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$.
Zobrazení $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$ je periodické, jestliže existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $r(t) = r(t+c)$. *Uzavřená křivka* je křivka, ke které existuje periodická parametrizace $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$.
Je-li $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$ periodické a rovnost $r(t) = r(t')$ nastane právě tehdy, když $t - t'$ je celistvý násobek c, pak řekneme, že $r(I)$ je *jednoduchá uzavřená křivka.*

Příklad. *Archimedova spirála* je rovinná křivka, kterou opisuje bod, rovnoměrně se šinoucí po přímce, která se rovnoměrně otáčí kolem počátku $O = [0, 0]$ (který je rovněž výchozím bodem šinutí). Je-li parametrem t úhel otočení přímky, pak $r(t) = [kt \cos t, kt \sin t]$.

2.2. Analýza v eukleidovském prostoru

Vyložme stručně základy diferenciálního počtu v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. V $\mathcal{E}$ máme k dispozici vzdálenost bodů danou vztahem $d(A, B) = \|B - A\|$, což stačí k budování matematické analýzy způsobem nepříliš odchylným od situace v $\mathbb{R}^n$. Níže vyložené poznatky lze shrnout tak, že diferenciální počet v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$ je shodný s obvyklým diferenciálním počtem v prostoru $\mathbb{R}^n$, pokud jsou $\mathcal{E}$ a $\mathbb{R}^n$ ztotožněny prostřednictvím některé kartézské souřadné soustavy.

Celé generace vynikajících geometrů studovaly diferenciální geometrii v prostoru $\mathbb{R}^n$. Proč to neděláme také tak? Zaprvé, v $\mathbb{R}^n$ není rozdíl mezi body a vektory. Zadruhé, při zavádění geometrických pojmů v $\mathbb{R}^n$ bychom vždy museli dokázat nezávislost na volbě kartézské souřadné soustavy, kdežto v obecném eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$ je toho dosaženo automaticky.

Nejdříve zavedeme zcela standardním způsobem pojem limity.

2.4. Definice. Řekneme, že zobrazení $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ má v bodě $t_0 \in I$ *limitu* $A \in \mathcal{E}$ a zapisujeme

$$A = \lim_{t \to t_0} r(t),$$

jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in I$ takové, že $0 < |t - t_0| < \delta$, platí

$$\|A - r(t)\| < \varepsilon.$$

Analogicky definujeme limitu zobrazení $\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbf{V}$.

Parametrizaci můžeme vyjádřit v afinních resp. kartézských souřadnicích $O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Jsou-li $x^1, \ldots, x^n$ reálné funkce $I \longrightarrow \mathbb{R}$ takové, že $r(t) = O + x^1(t)\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n(t)\mathbf{e}_n$, nazývá se soubor funkcí $(x^1, \ldots, x^n)$ *souřadnicové vyjádření* parametrizace r.

2.5. Tvrzení. *Zvolme libovolně souřadnou soustavu $O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Buď $A = O + \sum_i a^i \mathbf{e}_i$ bod. Dráha $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ má v čase t_0 limitu $A \in \mathcal{E}$ právě tehdy, když v souřadnicovém vyjádření $r(t) = O + x^1(t)\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n(t)\mathbf{e}_n$ mají všechny funkce x^i v čase t_0 limitu a^i. Tudíž,*

$$A = \lim_{t \to t_0} r(t) \quad \Leftrightarrow \quad a^i = \lim_{t \to t_0} x^i(t) \text{ pro každé } i.$$

Důkaz. V případě, že zvolená souřadná soustava je kartézská, máme

$$\begin{aligned} \|A - r(t)\|^2 &= \|(a^i - x^1(t))\mathbf{e}_1 + \cdots + (a^n - x^n(t))\mathbf{e}_n\|^2 \\ &= \sum_i (a^i - x^i(t))^2. \end{aligned}$$

Je-li nyní $\|A - r(t)\|^2 \le \varepsilon$, pak $(a^i - x^i(t))^2 \le \varepsilon$ pro každé i. Naopak, je-li $(a^i - x^i(t))^2 \le \varepsilon/n$ pro každé i, pak $\|A - r(t)\|^2 \le \varepsilon$. Odtud tvrzení v případě kartézské souřadné soustavy.

V případě, že zvolená souřadná soustava je afinní, existuje lineární zobrazení $\alpha : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, které ji převádí na kartézskou. Souřadnice se přitom transformují lineárně, tedy spojitě. Odtud tvrzení v obecném případě.

2.6. Důsledek. *Zvolme libovolně souřadnou soustavu $O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Dráha $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ je spojitá v bodě t_0 právě tehdy, když jsou v souřadnicovém vyjádření $r(t) = O + x^1(t)\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n(t)\mathbf{e}_n$ všechny funkce x^i spojité v bodě t_0.*

Přejděme nyní k diferencovatelnosti. Pro každé $t \in I$ je $r(t)$ některý bod eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$. Pro každé h takové, že $t + h \in I$, je $r(t + h)$ jiný bod eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$ a rozdíl $r(t + h) - r(t)$ je vektor ze zaměření $\mathbf{V}$. Poté i

$$\frac{r(t + h) - r(t)}{h} \in \mathbf{V}$$

je vektor a můžeme se ptát, zda existuje limita vektorové funkce $h \mapsto (r(t + h) - r(t))/h$ pro $h \longrightarrow 0$.

2.7. Definice. Řekneme, že zobrazení $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ je *diferencovatelné* v bodě t, jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(t + h) - r(t)}{h}. \tag{1}$$

Existuje-li, značí se $dr(t)/dt$ nebo $\dot r(t)$. Vektor $\dot r(t)$ se nazývá *vektor rychlosti* v bodě t. Dostáváme zobrazení $\dot r : I \longrightarrow \mathbf{V}$, $t \longmapsto \dot r(t)$, které se nazývá *derivace* dráhy $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$.

Derivace dráhy v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$ je drahou v jeho zaměření $\mathbf{V}$. Její diferencovatelnost a derivace se definují analogicky. Přicházíme k pojmu druhé derivace $d^2r(t)/dt^2 = d\dot r(t)/dt = \ddot r(t)$. Vektor $\ddot r(t)$ se nazývá *vektor zrychlení*. Analogicky se definuje třetí derivace $d^3r(t)/dt^3$ atd.

2.8. Tvrzení. *Při stejných označeních jako v Tvrzení 2.5 je parametrizace $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ diferencovatelná právě tehdy, když jsou všechny funkce x^i diferencovatelné. Poté platí*

$$\dot r(t) = \sum_i \dot x^i(t)\mathbf{e}_i,$$

kde $\dot x^i = dx^i/dt$.

Důkaz. Položme

$$\dot r(t) = \sum_i \dot x^i(t)\mathbf{e}_i,$$

kde $\dot x^i : I \longrightarrow \mathcal{E}$ jsou zatím neurčené funkce. Máme

$$\dot r(t) - \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \sum_i \Big(\dot x^i(t) - \frac{x^i(t+h) - x^i(t)}{h}\Big)\mathbf{e}_i.$$

Z Tvrzení 2.5 plyne, že

$$\dot r(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

právě tehdy, když

$$\dot x^i(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

pro každé i, to jest, $\dot x^i(t) = dx^i(t)/dt$ pro každé i. Odtud tvrzení.

Řekneme, že zobrazení $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ je třídy C^1 čili *spojitě diferencovatelné*, je-li diferencovatelné a derivace $\dot r : I \longrightarrow \mathbf{V}$ je spojitá. Řekneme, že zobrazení $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ je třídy C^k čili *k-krát spojitě diferencovatelné*, existuje-li k derivací $dr/dt, \dots, d^kr/dt^k : I \longrightarrow \mathbf{V}$ a všechny jsou spojité.

Při studiu křivek v n-rozměrném prostoru budeme potřebovat alespoň n derivací. Proto budeme v dalším mlčky předpokládat, že $k \geq n$, tj. že všechny parametrizace jsou alespoň n-krát spojitě diferencovatelné.

2.3. Derivace skalárního součinu

Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v} : I \longrightarrow \mathbf{V}$ dvě dráhy, skalární součin představuje funkci $I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$. Podobně norma $t \longmapsto \|\mathbf{u}(t)\|$.

2.9. Tvrzení. *Skalární součin vektorových drah $\mathbf{u}, \mathbf{v} : I \longrightarrow \mathbf{V}$ je diferencovatelná funkce s derivací*

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^{\boldsymbol\cdot} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

Norma dráhy je diferencovatelná funkce s derivací

$$\|\mathbf{u}\|^{\bullet} = \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|}$$

všude, kde $\mathbf{u}(t) \neq 0$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{u}(t) = \sum_i u^i(t)\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}(t) = \sum_j v^j(t)\mathbf{e}_j$ v nějaké pevné bázi tvořené vektory $\mathbf{e}_i$. Matice g_{ij} skalárního součinu v této bázi je konstantní, a proto

$$(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t))^{\bullet} = \frac{d}{dt} \sum_i g_{ij} u^i(t) v^j(t) = \sum_i g_{ij} \left(\frac{du^i(t)}{dt} v^j(t) + u^i(t) \frac{dv^j(t)}{dt} \right)$$
$$= \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

Podobně

$$\|\mathbf{u}(t)\|^{\bullet} = \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_i g_{ij} u^i(t) u^j(t)} = \frac{\sum_i g_{ij} \left(\frac{du^i(t)}{dt} u^j(t) + u^i(t) \frac{du^j(t)}{dt} \right)}{2\sqrt{\sum_i g_{ij} u^i(t) u^j(t)}}$$
$$= \frac{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{2\|\mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

2.10. Důsledek. *Nechť pro dráhu* $\mathbf{u} : I \longrightarrow \mathbf{V}$ *platí* $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$. *Pak* $\dot{\mathbf{u}}(t) \perp \mathbf{u}(t)$ *pro každé* $t \in I$.

Důkaz. Protože $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = \|\mathbf{u}(t)\|^2$ je konstantní, dostáváme $\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0$.

2.4. Reparametrizace

Buďte $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ a $q : J \longrightarrow \mathcal{E}$ dvě parametrizace v jednom a témže eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. Nechť existuje bijektivní C^n-diferencovatelné zobrazení $\phi : I \longrightarrow J$ takové, že $\phi : I \longrightarrow J$ je rovněž C^n-diferencovatelné (tj. C^n-difeomorfismus) a platí

$$r = q \circ \phi.$$

Pak jsou zřejmě křivky $r(I)$ a $q(J)$ totožné. Zobrazení ϕ se nazývá *reparametrizace.* O parametrizacích $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ a $q : J \longrightarrow \mathcal{E}$ pak říkáme, že jsou *ekvivalentní.*

Tvrzení lze obrátit. Jsou-li $r(I)$ a $q(J)$ jednoduché křivky, pak jsou zobrazení $r : I \longrightarrow r(I)$, $q : J \longrightarrow s(J)$ bijektivní, načež jsou $q^{-1} \circ r : I \longrightarrow J$ a $r^{-1} \circ q : J \longrightarrow I$ vzájemně inverzní C^n-difeomorfismy. Snadno se vidí, že se jedná o reparametrizace.

Otázka: Které vlastnosti křivek lze považovat za geometrické? Odpověď: Ty, které se nemění při reparametrizaci.

Příklad. Vektor rychlosti *není* geometrický pojem, protože při reparametrizaci $t = \phi(s)$ se násobí faktorem $d\phi/ds$. Vskutku, platí

$$\frac{dr(\phi(s))}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\phi(s)}{ds}. \tag{2}$$

2.11. Poznámka. Existuje univerzální způsob, jak se vypořádat s reparametrizacemi. Brzy uvidíme, že pro libovolnou křivku existuje parametrizace délkou, která je jednoznačně určena až na volbu počátku.

2.5. Orientace křivky

I zvířata vědí, že po křivce (například stopě) se lze vydat dvěma směry. Tento intuitivně zřejmý pojem samozřejmě má i matematické vyjádření. Faktor $d\phi/ds$ z předchozího příkladu je vždy nenulový. Derivováním rovnosti $\phi^{-1}(\phi(s)) = s$ totiž obdržíme $(d\phi^{-1}/dt)(d\phi/ds) = 1$.

Protože $d\phi/ds$ není nikde nula, platí vždy buď $d\phi/ds > 0$ nebo $d\phi/ds < 0$. V prvním případě řekneme, že parametrizace jsou *souhlasné*, ve druhém, že jsou *nesouhlasné*. Souhlasnost je relace ekvivalence na množině všech parametrizací. Protože všechny parametrizace nesouhlasné se zadanou parametrizací jsou mezi sebou souhlasné, má tato ekvivalence přesně dvě třídy. Nazývají se *orientace křivky*. Křivka se zvolenou orientací se nazývá *orientovaná křivka*. O souhlasné reparametrizaci pak říkáme, že *zachovává orientaci* křivky.

Otázka: Které vlastnosti orientovaných křivek lze považovat za geometrické? Odpověď: Ty, které se nemění při souhlasné reparametrizaci.

2.6. Délka křivky

2.12. Definice. *Délka* křivky $r(I)$ od bodu $r(t_1)$ k bodu $r(t_2)$ se definuje jako supremum

$$\ell_r(t_1, t_2) = \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ t_1 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = t_2}} \sum_{i=1}^{k} d(r(s_{i-1}), r(s_i)).$$

2.13. Tvrzení. *Při* $t_1 < t_2$ *platí*

$$\ell_r(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot r(t)\| \, dt. \tag{3}$$

Důkaz. Stačí ukázat, že tvrzení platí pro přímky, protože vše ostatní plyne z definice integrálu. Uvažujme tedy o přímce $r(t) = P + t\mathbf{u}$. Pak $\dot r(t) = \mathbf{u}$ a při $t_2 > t_1$ máme

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \|\dot r(t)\| \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{u}\| \, dt = (t_2 - t_1)\|\mathbf{u}\| = \|(t_2 - t_1)\mathbf{u}\| = \|r(t_2) - r(t_1)\| \\ &= d(r(t_2), r(t_1)),\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Délka křivky je geometrická vlastnost křivky, kdežto integrál (3) závisí na orientaci. Vskutku, je-li $t = \phi(s)$ reparametrizace, přičemž $t_1 = \phi(s_1)$, $t_2 = \phi(s_2)$, pak

$$\begin{aligned}\ell_r(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{dr(t)}{dt} \right\| dt = \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{dr(\phi(s))}{ds} \Big/ \frac{d\phi(s)}{ds} \right\| \frac{d\phi(s)}{ds} \, ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{dr(\phi(s))}{ds} \right\| \frac{d\phi(s)}{ds} \Big/ \left| \frac{d\phi(s)}{ds} \right| ds \\ &= \operatorname{sgn}\left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right) \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{dr(\phi(s))}{ds} \right\| ds = \operatorname{sgn}\left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right) \ell_{r\circ\phi}(s_1, s_2)\end{aligned}$$

kde jsme použili formuli (2) a větu o substituci v integrálu. Tudíž, změníme-li orientaci křivky, integrál (3) změní znaménko.

2.7. Parametrizace křivek obloukem

Buď $r(I)$ křivka s regulární parametrizací $r : I \longrightarrow \mathcal{A}$. Položme

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{r}(\tau)\| \, d\tau, \tag{4}$$

kde $t_0 \in I$ je libovolně zvolený bod. Pak je $s(t)$ monotonní funkce, a tedy invertibilní. Reparametrizujme křivku inverzní funkcí $t(s)$. Parametrizace $r(t(s))$ se nazývá *parametrizace obloukem.*

2.14. Tvrzení. *Buď $r(I)$ křivka parametrizovaná obloukem. Pak $\|\dot{r}\| = 1$.*

Důkaz. Z definice (4) plyne, že $ds(t)/dt = \|\dot{r}(t)\|$, a proto $dt(s)/ds = 1/\|\dot{r}(t)\|$. Nyní stačí dosadit do (2).

Díky vztahu $\|\dot{r}\| = 1$ je parametrizace obloukem výhodná po všech stránkách kromě jediné – k jejímu získání je nutno počítat integrál (4). To je pro značnou část geometrických výpočtů nejen zbytečné, ale velmi často jde o výraznou komplikaci. Například již v případě elipsy integrál (4) nepatří mezi elementární funkce. Proto se v tomto textu parametrizaci obloukem vyhýbáme.

2.8. Singulární a regulární body

I křivky určené hladkými parametrizacemi mohou mít "hroty." Nazývají se singulární body a vznikají v případě, že se pohyb po křivce zastaví a poté pokračuje jiným směrem.

2.15. Definice. Bod $r(t)$ se nazývá *singulární bod* křivky $r(I)$, jestliže $\dot{r}(t) = 0$. V opačném případě se nazývá *regulární bod* křivky $r(I)$.

Příklad. Kutálí-li se jednotková kružnice po přímce p, opisuje každý bod kružnice křivku s parametrickými rovnicemi

$$x^1(\theta) = \theta - \sin\theta,$$
$$x^2(\theta) = 1 - \cos\theta,$$

Tato křivka se nazývá *cykloida.* Při $\theta = 0$ se bod ocitá na přímce p. Jde o singulární bod, protože obě derivace $\dot{x}^1(0) = (1 - \cos\theta)|_{\theta=0} = 0$ a $\dot{x}^2(0) = \sin\theta|_{\theta=0} = 0$ jsou nulové.

Cvičení. Kutálí-li se kružnice o poloměru $\frac{1}{4}$ po vnitřní straně jednotkové kružnice, opisuje každý bod menší kružnice křivku, která se nazývá *asteroida.*

1. Ukažte, že křivka s parametrickými rovnicemi

$$x^1(\theta) = \cos^3\theta,$$
$$x^2(\theta) = \sin^3\theta.$$

je asteroida.

2. Najděte singulární body asteroidy.
3. Najděte obecné rovnice asteroidy.

Cvičení. O zeď a podlahu se opírá žebřík. Řemeslník se vyšplhá do poloviny žebříku, načež se vlivem gravitace oba sesunou na podlahu. Jako křivku opíše řemeslník? Žebřík považujte za úsečku konstantní délky a řemeslníka za hmotný bod. Stěna a podlaha jsou navzájem kolmé přímky. Gravitace působí kolmo na podlahu.

Cvičení. Co jsou *brachystochrona* a *tautochrona*? Co je *izochronní kyvadlo*?

Lze říci, že singularita a regularita jsou v podstatě geometrické pojmy – viděli jsme, že při reparametrizaci se vektor rychlosti násobí nenulovým faktorem $d\phi/ds$. Proto můžeme hovořit o singulárním a regulárním bodě křivky, i když se definuje pomocí jisté parametrizace.

Může se však stát, že stejná křivka má i zcela regulární parametrizaci.

Příklad. Buď P bod a $\mathbf{u}$ vektor. Křivka $r(t) = P + t^3\mathbf{u}$ má singulární bod v $t = 0$, přestože obrazem $r(\mathbb{R})$ je přímka. Pro $t = 0$ se pohyb po přímce zastaví (vektor rychlosti $\dot{r}(t)$ je nulový), ale poté pokračuje stejným směrem.

Dále budeme předpokládát, že křivky jsou parametrizovány regulárně ve všech bodech, ve kterých to je možné.

2.9. Tečný vektor ke křivce

Vektor $\dot{r}$ je vektorem rychlosti pohybu po křivce, při reparametrizaci $t = \phi(s)$ se mění (násobí nenulovým faktorem $d\phi/ds$), a proto sám o sobě není geometrickým pojmem. Normováním tečného vektoru $\dot{r}$ ke dráze získáme vektor $\dot{r}/\|\dot{r}\|$, který se nazývá tečný vektor ke křivce. Při reparametrizaci $t = \phi(s)$ dostaneme

$$\frac{\dfrac{dr(\phi(s))}{ds}}{\left\|\dfrac{dr(\phi(s))}{ds}\right\|} = \frac{\dfrac{dr(t)}{dt}\dfrac{d\phi(s)}{ds}}{\left\|\dfrac{dr(t)}{dt}\dfrac{d\phi(s)}{ds}\right\|} = \frac{\dfrac{dr(t)}{dt}}{\left\|\dfrac{dr(t)}{dt}\right\|}\frac{\dfrac{d\phi(s)}{ds}}{\left|\dfrac{d\phi(s)}{ds}\right|} = \frac{\dfrac{dr(t)}{dt}}{\left\|\dfrac{dr(t)}{dt}\right\|}\operatorname{sgn}\frac{d\phi(s)}{ds}.$$

Vidíme, že při souhlasné reparametrizaci se tečný vektor ke křivce nemění, kdežto při nesouhlasné reparametrizaci změní znaménko. Vyplývá odtud, že následující definice má smysl jen pro orientované křivky.

2.16. Definice. *Tečný vektor k orientované křivce* $r(I)$ v regulárním bodě $r(t_0)$ je vektor

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{\dot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0)\|}.$$

V singulárním bodě tečný vektor nedefinujeme.

Tečný vektor k orientované křivce je geometrický pojem.

Příklad. Vypočtěme tečný vektor ke kružnici $r(t) = [a\cos t, a\sin t]$. Derivováním obdržíme

$$\dot{r}(t) = (-a\sin t, a\cos t),$$

přičemž $\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a$. Odtud tečný vektor

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|} = (-\sin t, \cos t).$$

Přesvědčte se, že je kolmý k poloměru kružnice.

Pro křivky orientované ve směru vzrůstajícího parametru je tečný vektor limitou normovaného přírůstku dráhy (tj. limitou normované sečny). Plyne to z následujícího výpočtu.

2.17. Lemma. *Platí*

$$\mathbf{T}(t) = \pm \lim_{h\to\pm 0} \frac{r(t+h)-r(t)}{\|r(t+h)-r(t)\|}.$$

Důkaz.

$$\lim_{h\to\pm 0} \frac{r(t+h)-r(t)}{\|r(t+h)-r(t)\|} = \lim_{h\to\pm 0} \frac{\dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}h}{\dfrac{\|r(t+h)-r(t)\|}{|h|}|h|}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to\pm 0} \dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}}{\lim\limits_{h\to\pm 0}\left\|\dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}\right\|} \lim_{h\to\pm 0} \frac{h}{|h|} = \pm\frac{\dot r(t)}{\|\dot r(t)\|}.$$

2.10. Tečna ke křivce

Podobně jako tečný vektor, tečna ke křivce $r(I)$ je limitní polohou přímky (sečny) spojující dva body křivky, které se k sobě neomezeně přibližují. Nic nám nebrání tečnu takto definovat, ale s ohledem na další použití bude jednodušší ji definovat bodem a směrnicí. Ekvivalentnost obou definic dokážeme.

2.18. Definice. *Tečna* ke křivce v regulárním bodě $r(t)$ je přímka, určená bodem $r(t)$ a zaměřením $[\![\dot r(t)]\!]$. V singulárním bodě definujeme tečnu zleva a tečnu zprava jako příslušné limity zleva a zprava.

Příklad. Rovinná křivka

$$r(t) = [a\cos t, a\sin t]$$

je kružnice o poloměru $a > 0$.

Nalezněme její tečny. Máme

$$\dot r(t) = (-a\sin t, a\cos t),$$

načež zaměření tečny v bodě $r(t)$ je

$$[\![\dot r(t)]\!] = [\![(-a\sin t, a\cos t)]\!] = [\![(-\sin t, \cos t)]\!].$$

Tečna v bodě $r(t)$ pak je množina bodů

$$r(t) + b\dot r(t) = [a\cos t, a\sin t] + b(-\sin t, \cos t) = [a\cos t - b\sin t, a\sin t + b\cos t],$$

kde $b\in\mathbb{R}$ je parametr podél tečny.

Cvičení. Ke kružnici $r(t) = [a\cos t, a\sin t]$ veďte tečnu procházející daným bodem $P = [x, y]$. Proveďte diskusi počtu řešení.

Návod: Řešte rovnice $x = a\cos t - b\sin t$, $y = a\sin t + b\cos t$ vzhledem k neznámým t, b.

Návod: Vyjádřete $x^2 + y^2$.

Cvičení. Ukažte, že přímka je sama sobě tečnou v libovolném bodě.

Abychom dokázali ekvivalenci s intuitivní definicí tečny, musíme upřesnit, co se rozumí limitní polohou přímky. Označme $\mathcal{P}_a$ množinu všech přímek procházejících bodem $a \in \mathcal{E}$. Zaveďme vzdálenost dvou takových přímek jako jejich odchylku; jde o metriku a $\mathcal{P}_a$ je metrický prostor. Můžeme tedy obvyklým způsobem definovat limitu zobrazení $I \longrightarrow \mathcal{P}_a$.

2.19. Tvrzení. *Buď $r(I)$ křivka s regulárním bodem $r(t_0)$. Uvažujme o zobrazení $I \longrightarrow \mathcal{P}_{r(t_0)}$, $t \longmapsto r(t_0) + [\![r(t) - r(t_0)]\!]$. Pak platí*

$$\lim_{t \to t_0} r(t_0) + [\![r(t) - r(t_0)]\!] = r(t_0) + [\![\dot{r}(t_0)]\!].$$

Důkaz. Stačí ukázat, že odchylka $\phi(t)$ vektorů $\dot{r}(t_0)$ a $r(t) - r(t_0)$ má limitu nula nebo $\pi/2$. Podle lemmatu 2.17 však platí

$$\lim_{t \to t_0} \cos \phi(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{r}(t_0) \cdot (r(t) - r(t_0))}{\|\dot{r}(t_0)\| \, \|r(t) - r(t_0)\|} = \frac{\dot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0)\|} \cdot \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{\|r(t) - r(t_0)\|}$$

$$= \pm \frac{\dot{r}(t_0) \cdot \dot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0)\| \, \|\dot{r}(t_0)\|} = \pm 1$$

a důkaz je hotov.

Příklad. *Traktrix* je rovinná křivka, jejíž tečny vykazují konstantní vzdálenost mezi bodem dotyku a průsečíkem s pevnou přímkou l. Uvažujme o hmotném bodu M, upevněném na niti konstantní délky a. Jestliže bod M táhneme, pohybujíce koncem napjaté niti po přímce l, pak M opisuje traktrix. Najděme parametrické vyjádření této křivky.

Zvolme kartézskou souřadnou soustavu tak, že osa x splývá s přímkou l, tj. $l = [0,0] + [\![(1,0)]\!]$. Buď $r(t) = [x(t), y(t)]$ libovolný bod křivky. Tečnou v bodě $r(t)$ je přímka $r(t) + [\![\dot{r}(t)]\!]$. Průsečík P obou přímek obdržíme jako řešení soustavy rovnic $[x(t), y(t)] + s_1 \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = [0,0] + s_2 \cdot (1,0)$, čili

$$x(t) + s_1 \dot{x}(t) = s_2,$$

$$y(t) + s_1 \dot{y}(t) = 0.$$

Odtud $s_1 = -y(t)/\dot{y}(t)$, a tedy

$$P = [s_2, 0] = \left[x(t) - \frac{y(t)}{\dot{y}(t)} \dot{x}(t), 0 \right].$$

Vektor

$$r(t) - P = \left(\frac{y(t)}{\dot{y}(t)} \dot{x}(t), y(t) \right)$$

má mít konstantní délku a. Označíme-li u odchylku tečny od osy x, máme

$$\frac{y(t)}{\dot{y}(t)} \dot{x}(t) = a \cos u, \qquad y(t) = a \sin u.$$

Nyní položíme $u = t$ (čímž zvolíme u za parametr křivky), načež $y(t) = a \sin t$, $\dot{y}(t) = a \cos t$ a z první rovnice dostáváme

$$\dot{x}(t) = a \, \frac{\cos^2 t}{\sin t}.$$

Integrací obdržíme parametrické rovnice

$$x(t) = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \qquad y(t) = a \sin t.$$

Cvičení. Má traktrix singulární bod?

Cvičení. U traktrix nalezněte parametrizaci obloukem.

Cvičení. *Logaritmická spirála* je křivka, jejíž tečny svírají konstantní úhel se spojnicí bodu dotyku s počátkem. Nalezněte parametrické rovnice logaritmické spirály.

2.11. Křivost

Číslo $\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|$ se při reparametrizaci mění stejně jako $\|\dot r(t)\|$ (obě se násobí stejným faktorem). Tudíž, poměr

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot r(t)\|} \geq 0$$

se s reparametrizací nemění. Nazývá se *křivost* křivky $r(I)$ v bodě $r(t)$.

Příklad. Derivace tečného vektoru je

$$\dot{\mathbf{T}} = \left(\frac{\dot r}{\|\dot r\|}\right)^{\bullet} = \frac{\ddot r}{\|\dot r\|} - \frac{\|\dot r\|^{\bullet}}{\|\dot r\|^2}\dot r = \frac{\ddot r}{\|\dot r\|} - \frac{\ddot r \cdot \dot r}{\|\dot r\|^3}\dot r.$$

Cvičení. Pro křivost platí

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot r \cdot \dot r)(\ddot r \cdot \ddot r) - (\dot r \cdot \ddot r)^2}}{\|\dot r\|^3}.$$

Dokažte.

Při parametrizaci obloukem s dostáváme jednoduše

$$\kappa(s) = \left\|\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\right\|.$$

Zůstaneme-li u parametrizace obloukem, je křivost mírou rychlosti, s níž křivka mění svůj směr. Uvažujme o dvou blízkých bodech $r(s)$ a $r(s+h)$. Odchylku tečných vektorů v těchto bodech označíme $\phi(\mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s+h))$.

2.20. Tvrzení. *Platí*

$$\kappa(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\|\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)\|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(\mathbf{T}(s+h), \mathbf{T}(s))}{h}.$$

Při důkazu využijeme rovnosti $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$.

2.21. Lemma. *Na dráze tvořené vektory* $\mathbf{w}(t)$ *jednotkové délky platí*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(\mathbf{w}(t+h), \mathbf{w}(t))}{\|\mathbf{w}(t+h) - \mathbf{w}(t)\|} = 1.$$

Důkaz lemmatu. Uvažujme o vektorech $\mathbf{u} = \mathbf{w}(t+h)$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)$. Jelikož $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$, máme $\cos\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, zatímco

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 = 2 - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Odtud $\cos\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1 - \frac{1}{2}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$, načež

$$\begin{aligned}\sin\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \sqrt{1-\cos^2\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})} = \sqrt{1-(1-\tfrac{1}{2}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2)^2}\\ &= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2}.\end{aligned}$$

Při $h \to 0$ máme $\mathbf{v} \to \mathbf{u}$, načež

$$\frac{\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|} \to \frac{\sin\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|} \to \sqrt{1-\tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2} \to 1,$$

což ukončuje důkaz.

Důkaz tvrzení. Pro rychlost změny odchylky následně obdržíme s použitím l'Hôpitalova pravidla a lemmatu 2.17

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\phi(\mathbf{T}(t),\mathbf{T}(t+h))}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\|\mathbf{T}(t+h)-\mathbf{T}(t)\|}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{d}{dh}\|\mathbf{T}(t+h)-\mathbf{T}(t)\| = \lim_{h\to 0}\frac{(\mathbf{T}(t+h)-\mathbf{T}(t))\cdot\dot{\mathbf{T}}(t+h)}{\|\mathbf{T}(t+h)-\mathbf{T}(t)\|}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+h)-\mathbf{T}(t)}{\|\mathbf{T}(t+h)-\mathbf{T}(t)\|}\cdot\lim_{h\to 0}\dot{\mathbf{T}}(t+h) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}\cdot\dot{\mathbf{T}}(t)\\ &= \|\dot{\mathbf{T}}(t)\|.\end{aligned}$$

Nyní stačí dosadit $t = s$.

2.22. Poznámka. Geometricky lze křivost popsat i jako poměr rychlosti pohybu po křivce a po její indikatrix. *Indikatrix* křivky $r(t)$ je křivka $O+\mathbf{T}(t)$, kterou obdržíme, umístíme-li tečný vektor $T(t)$ ke křivce $r(I)$ v pevném bodě O (konkrétní volba počátku O je nepodstatná). Protože $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, leží indikatrix na jednotkové sféře S^{n-1} kolem bodu O. Vektor rychlosti pohybu po indikatrix je právě $\dot{\mathbf{T}}(t)$.

Příklad. Určeme křivost šroubovice $r(t) = [a\cos t, a\sin t, bt]$. Již víme že

$$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \|\dot{\mathbf{T}}(t)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Tudíž,

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{r}(t)\|} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Opačný poměr

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{\|\dot{r}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}$$

se nazývá *poloměr křivosti* křivky $r(I)$ v bodě $r(t)$.

Cvičení. Ukažte, že poloměr křivosti kružnice o poloměru R je roven R.

Cvičení. *Klotoida* je křivka, kterou roku 1874 zavedl francouzský fyzik Marie Alfred Cornu v souvislosti se zkoumáním difrakce světla. Její parametrické rovnice jsou dány tzv. Fresnelovými integrály

$$x = \int_0^t \cos \pi s^2 \, ds, \qquad y = \int_0^t \sin \pi s^2 \, ds.$$

Ukažte, že křivost klotoidy je přímo úměrná délce oblouku. Řidič vozidla jedoucího po klotoidě natáčí volant úměrně projeté vzdálenosti. Oblouky silnic a železnic se obvykle navrhují ve tvaru klotoidy.

2.12. Normála ke křivce a normálový vektor

Normálový vektor vyjadřuje změnu tečného vektoru $\mathbf{T}$. Při reparametrizaci se však $\dot{\mathbf{T}}$ chová stejně jako vektor $\dot{r}$ – násobí se faktorem $d\phi/ds$ (přesněji jeho absolutní hodnotou – viz cvičení níže). S vektorem $\dot{\mathbf{T}}$ proto lze naložit podobně jako s vektorem $\dot{r}$ v předchozím odstavci; opět s vyloučením případů, kdy $\dot{\mathbf{T}} = 0$.

2.23. Definice. Bod $r(t_0)$ se nazývá *inflexní bod* křivky $r(I)$, jestliže $\dot{\mathbf{T}}(t_0) = 0$. V opačném případě se nazývá *neinflexní bod* křivky $r(I)$.

2.24. Definice. *Normálový vektor ke křivce* $r(I)$ v neinflexním bodě $r(t)$ je vektor

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}.$$

V inflexním bodě normálový vektor nedefinujeme.

Normálový vektor ukazuje "kam se křivka ohýbá." Často jej lze určit i v inflexním bodě na základě spojitosti.

2.25. Definice. *Normála* ke křivce $r(I)$ v neinflexním bodě $r(t_0)$ je přímka, určená bodem $r(t_0)$ a zaměřením $[\![\dot{\mathbf{T}}(t_0)]\!]$. V inflexním bodě normálu nedefinujeme.

Podle definice je $\|\mathbf{T}\| = 1$, a proto podle Tvrzení 2.10 je derivace $\dot{\mathbf{T}}$ kolmá k $\mathbf{T}$. Tudíž, tečna a normála jsou vzájemně kolmé.

Příklad. Vypočtěme normálový vektor ke kružnici $r(t) = [a \cos t, a \sin t]$, $a > 0$. Tečný vektor

$$\mathbf{T}(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

jsme již vypočetli dříve. Derivováním obdržíme

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = (-a \cos t, -a \sin t),$$

přičemž $\|\dot{\mathbf{T}}(t)\| = a$, a tudíž

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|} = (-\cos t, -\sin t).$$

Všimněte si, že je orientován dovnitř kružnice. Kdybychom reparametrizovali $t \longrightarrow -t$, byl by orientován vně?

2.26. Definice. Rovina $r(t) + [\![\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t)]\!]$, určená tečnou a normálou v bodě $r(t)$, se nazývá *oskulační rovina* křivky $r(I)$ v bodě $r(t)$.

Následující tvrzení ponecháme bez důkazu.

2.27. Tvrzení. *Oskulační rovina v bodě $r(t_0)$ je limitní poloha roviny určené třemi body $r(t_0)$, $r(t_1)$, $r(t_2)$, když $t_1, t_2 \longrightarrow t_0$.*

Cvičení. Ukažte, že při reparametrizaci $t = \phi(s)$ se derivace $\dot{T}(t_0)$ vynásobí faktorem $|d\phi(s)/ds|$, tudíž nezávisí na orientaci. Proto nejen normála, ale i normálový vektor *ke křivce* jsou geometrické pojmy.

Příklad. Prostorová křivka

$$r(t) = [a\cos t, a\sin t, bt]$$

se nazývá šroubovice. Opisuje ji bod, který se nachází ve vzdálenosti $a > 0$ od osy z, kolem níž současně rotuje a rovnoměrně postupuje. Průmět křivky do roviny kolmé k ose z je kružnice o poloměru a. Koeficient b určuje stoupání šroubovice.

Vypočtěme tečný vektor. Máme

$$\dot{r}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

přičemž $\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Odtud tečný vektor

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Vypočtěme normálový vektor. Máme

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, 0\right),$$

a

$$\|\dot{\mathbf{T}}(t)\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

načež

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Ve shodě s intuicí, normálový vektor je kolmý k ose z.

Cvičení. Určete oskulační rovinu šroubovice v bodě $r(t)$. Ukažte, že pro odchylku θ oskulační roviny a osy z platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}.$$

Návod: Směrový vektor osy z je $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$.

2.13. Frenetův repér

V n-rozměrném eukleidovském prostoru můžeme konstruovat i další význačné vektory. Bod $r(t_0)$ se nazývá *generický bod* orientované křivky $r(I)$, jsou-li vektory $dr(t)/dt$, $d^2r(t)/dt^2, \ldots,$ $d^nr(t)/dt^n$ lineárně nezávislé, a tedy tvoří bázi v zaměření. V generickém bodě jsou lineární obaly

$$\begin{aligned}
&\left[\!\left[\frac{dr(t)}{dt}\right]\!\right],\\
&\left[\!\left[\frac{dr(t)}{dt}, \frac{d^2r(t)}{dt^2}\right]\!\right],\\
&\cdots,\\
&\left[\!\left[\frac{dr(t)}{dt}, \frac{d^2r(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nr(t)}{dt^n}\right]\!\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

do sebe vložené podprostory, nezávislé na parametrizaci.

2.28. Definice. *Frenetův repér* v bodě $r(t_0)$ je ortonormální báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ v zaměření prostoru $\mathcal{E}$, vzniklá Gram–Schmidtovou ortonormalizací soustavy vektorů $dr(t)/dt$, $d^2r(t)/dt^2$, $\cdots$, $d^nr(t)/dt^n$ v bodě t_0.

Lineární obaly (5) jsou pak po řadě totožné s lineárními obaly

$$\begin{aligned} &[\![\mathbf{e}_1]\!], \\ &[\![\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]\!], \\ &\cdots, \\ &[\![\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]\!]. \end{aligned} \tag{6}$$

Frenetův repér je určen skoro jednoznačně. Přesněji, vektory $\mathbf{e}_i$ ortonormální báze jsou určeny až na znaménko, tj. každý z nich může být nahrazen vektorem opačným.

Cvičení. Ukažte, že za vektor $\mathbf{e}_2$ lze vždy volit normálový vektor $\mathbf{N}$.

Přímky $r(t_0) + [\![\mathbf{e}_1(t_0)]\!]$, $r(t_0) + [\![\mathbf{e}_2(t_0)]\!]$, $r(t_0) + [\![\mathbf{e}_3(t_0)]\!]$ se nazývají po řadě *tečna, normála a binormála* v bodě $r(t_0)$. Vektory $\mathbf{e}_1(t_0), \mathbf{e}_2(t_0), \mathbf{e}_3(t_0)$ se nazývají po řadě *tečný vektor, normálový vektor* a *binormálový vektor* v bodě $r(t_0)$.

Příklad. Vypočtěme Frenetův repér šroubovice

$$r(t) = [a\cos t, a\sin t, bt].$$

Derivováním obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (-a\sin t, a\cos t, b), \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= (-a\cos t, -a\sin t, 0), \\ \frac{d^3r}{dt^3} &= (a\sin t, -a\cos t, 0). \end{aligned}$$

Vektory vzniklé Gram-Schmidtovou ortogonalizací označíme $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Máme

$$\mathbf{u}_1 = \frac{dr}{dt} = (-a\sin t, a\cos t, b),$$

načež

$$\mathbf{u}_2 = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \frac{d^2r}{dt^2} = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$

protože skalární součin $(d^2r/dt^2)\cdot\mathbf{u}_1$ je roven nule. Poté

$$\mathbf{u}_3 = \frac{d^3r}{dt^3} - \frac{\frac{d^3r}{dt^3}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\frac{d^3r}{dt^3}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2,$$

kde zase $(d^3r/dt^3)\cdot\mathbf{u}_2 = 0$, ale

$$\frac{\frac{d^3r}{dt^3}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1} = -\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

načež

$$\mathbf{u}_3 = (a\sin t, -a\cos t, 0) + \frac{a^2}{a^2+b^2}(-a\sin t, a\cos t, b) = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\sin t, -\frac{ab^2}{a^2+b^2}\cos t, \frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right)$$

Normalizací získáme

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\\
\mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = (-\cos t, -\sin t, 0),\\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).
\end{aligned}$$

Cvičení. Ukažte, že ve třírozměrném prostoru lze binormálový vektor $\mathbf{e}_3$ ztotožnit s vektorovým součinem $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ tečného a normálového vektoru.

2.29. Věta (Frenet–Serretovy vzorce). *Existují funkce $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ takové, že platí*

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{e}}_{n-1} \\ \dot{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} = \|\dot{r}\| \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 & 0 & & 0 \\ -\chi_1 & 0 & \chi_2 & \ddots & \\ 0 & -\chi_2 & 0 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \chi_{n-1} \\ 0 & & 0 & -\chi_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix},$$

Důkaz. Čtvercovou matici ve Frenetových vzorcích označme Q. Řádky matice $\|\dot{r}\|\,Q$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\dot{\mathbf{e}}_k$ v ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Tudíž,

$$\|\dot{r}\|\,Q_{ij} = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Protože však $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ je konstanta (0 nebo 1), platí $\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_i$, a tedy $Q_{ij} = -Q_{ji}$ (čili matice Q je antisymetrická). Zejména tedy platí $Q_{ii} = 0$.

Podle Gram–Schmidtových formulí však vektory $\dot{\mathbf{e}}_k$ leží v lineárním obalu $[\![\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k+1}]\!]$. Proto $Q_{ij} = 0$ kdykoliv $j > i+1$. Nad hlavní diagonálou už zbývají jen prvky na pozicích $Q_{i,i+1}$, které označíme χ_i. Hodnoty pod hlavní diagonálou plynou z antisymetrie.

2.30. Definice. Čísla

$$\chi_k(t) = \frac{\dot{\mathbf{e}}_k(t) \cdot \mathbf{e}_{k+1}(t)}{\|\dot{r}(t)\|}, \qquad k = 1, \dots, n-1 \tag{7}$$

se nazývají *zobecněné křivosti* křivky $r(I)$ v bodě $r(t)$. Invariant χ_1 se značí κ a nazývá prostě *křivost*. Invariant χ_2 se značí τ a nazývá *torze*.

Cvičení. Ukažte, že zobecněné křivosti jsou invariantní vůči reparametrizacím.

Cvičení. Ukažte, že $\chi_1 = \kappa$ je rovna křivosti, kterou jsme zavedli dříve.

Příklad. Vypočtěme invarianty šroubovice $r(t) = [a\cos t, a\sin t, bt]$. Jmenovatele $\|\dot r(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$ a Frenetův repér $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ již známe. Zbývá dopočítat

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, 0\right),$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = (\sin t, -\cos t, 0),$$

načež

$$\kappa = \chi_1(t) = \frac{\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\|\dot r\|} = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\tau = \chi_2(t) = \frac{\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3}{\|\dot r\|} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Všimněme si, že čitatel zlomku (7) je roven $k+1$-ní souřadnici derivace k-tého Frenetova vektoru. Ukazuje se, že ostatní souřadnice vektoru $\dot{\mathbf{e}}_k$ jsou buď nulové nebo rovny jiným zobecněným křivostem až na znaménko. Snadno se zapamatují v maticovém zápisu.

Zobecněné křivosti jsou tzv. *skalární invarianty* křivek v eukleidovském prostoru.

2.31. Tvrzení. *Buď $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ shodnost. Buď $r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizovaná křivka, buď $\bar r = \alpha \circ r : I \longrightarrow \mathcal{E}$ její obraz. Obě křivky $r(I)$ a $(\alpha \circ r)(I)$ mají stejné zobecněné křivosti $\chi_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Důkaz. V každém bodě $t \in I$ shodnost α převádí Frenetův repér křivky r na Frenetův repér křivky $\bar r$. Zbytek je zřejmý.

Platí i obrácené tvrzení a nejsnáze se dokáže v případě parametrizace obloukem.

2.32. Důsledek. *Buďte $r(I)$ a $\bar r(I)$ dvě křivky procházející týmž bodem $r(s_0) = \bar r(s_0)$ a parametrizované obloukem. Buďte $\chi_k(s)$ a $\bar\chi_k(s)$ jejich zobecněné křivosti jako spojité funkce oblouku s. Nechť $\chi_k(s) = \bar\chi_k(s)$ pro každé $k = 1, \dots, n-1$. Pak existuje shodnost $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ taková, že $\bar r = \alpha \circ r$.*

Důkaz. V parametrizaci obloukem máme $\dot r(s) = \mathbf{e}_1$ a $\dot{\bar r}(s) = \bar{\mathbf{e}}_1$ (Tvrzení 2.14). Ve Frenet–Serretových vzorcích pak vypadne koeficient před maticí Q. Dostáváme systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic se spojitými koeficienty s neznámými $r, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Pro obě křivky dostaneme jeden a týž systém. Jeho řešení jsou určena jednoznačně až na volbu počátečních podmínek, jimiž je v tomto případě poloha Frenetova repéru $\mathbf{e}_i$ resp. $\bar{\mathbf{e}}_i$ v bodě t_0. Oba Frenetovy repéry lze ztotožnit shodností v $\mathcal{E}$, odtud tvrzení.

2.33. Tvrzení. *Zobecněná křivost $\chi_k(t)$ je rovna nule ve všech bodech křivky právě tehdy, když křivka leží v k-rozměrném afinním podprostoru $r(t_0) + [\![\mathbf{e}_1(t_0), \mathbf{e}_2(t_0), \dots, \mathbf{e}_k(t_0)]\!]$ (který pak nezávisí na volbě bodu t_0).*

Důkaz. Cvičení.

2.14. Evolventa a evoluta

Příklad. *Evolventa* křivky $r(I)$ je křivka $\bar r(I)$ s parametrickou rovnicí

$$\bar r(t) = r(t) - \ell_r(t_0, t)\mathbf{T}(t) = r(t) - \frac{\int_{t_0}^{t} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\, dt}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}\dot{\mathbf{r}}(t).$$

Evolventu opisuje konec niti, odvíjející se z dané křivky. Hodnota t_0 označuje počátek odvíjení a lze ji volit libovolně.

Cvičení. 1) Najděte evolventu kružnice.

2) Ukažte, že evolventou cykloidy je opět cykloida (jinak umístěná). Jak se konstruuje izochronní kyvadlo?

Cvičení. Dokažte, že tečna ke křivce je normálou její evolventy.

3. Geometrie podvariet

V této kapitole obecně pojednáme o geometrii *k-rozměrných podvariet* v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$, kde $1 \leq k < n$; později se pro jednoduchost omezíme na případ $k = n - 1$. Podvariety jsou vícerozměrné analogie křivek (které obdržíme v případě $k = 1$). Dvourozměrné podvariety se nazývají plochy.

Geometrie podvariet je oproti geometrii křivek mnohem bohatší. Existují dva důležité rozdíly: 1) podvariety mohou mít mnohem složitější topologii než křivky; 2) na rozdíl od křivek, podvariety eukleidovského prostoru mají tzv. vnitřní geometrii.

Podobně jako křivku, podvarietu můžeme definovat více způsoby. Podvarieta o dimenzi k může být zadána *obecnými rovnicemi* jako množina

$$\{a \in \mathcal{E} \mid F^1(a) = \cdots = F^{n-k}(a) = 0\}$$

nulových bodů nějaké soustavy $n-k$ funkcí $F^j : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$. V kartézských souřadnicích $x^1, \ldots, x^n$ můžeme psát $F^j(x^1, \ldots, x^n)$. Předpokládáme přitom, že Jacobiho matice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^l}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

má maximální přípustnou hodnost, tj. $n - k$.

Stejnou množinu však můžeme lokálně (v okolí každého bodu) popsat parametrickými rovnicemi a tomuto přístupu budeme dávat přednost, protože výsledná teorie je znatelně jednodušší.

3.1. Definice. Množina bodů prostoru $\mathbb{R}^n$ splňujících

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1$$

se nazývá $n - 1$-rozměrná sféra a značí se S^{n-1}. Parametrické rovnice sféry určíme později.

3.1. Parametrizace podvariet

Buď $\mathcal{E}$ eukleidovský prostor dimenze n se zaměřením $\mathbf{V}$. Připomeňme, že v části 2.2 jsme vybudovali analýzu funkcí $f : I \to \mathcal{E}$ jedné proměnné a předvedli její vyjádření v souřadnicích. Podobně lze budovat i analýzu funkcí $r : U \to \mathcal{E}$ více proměnných a získat její vyjádření v souřadnicích. Speciálně můžeme zavést parciální derivace jako limity

$$\mathbf{r}_i := \frac{\partial r}{\partial x^i} = \lim_{h \to 0} \frac{r(x^1, \ldots, x^i + h, \ldots, x^k) - r(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^k)}{h}. \tag{8}$$

Pokud existují, parciální derivace jsou vektory v zaměření $\mathbf{V}$ (proto označení $\mathbf{r}_i$). Později uvidíme, že vektory $\mathbf{r}_i$ tvoří bázi tečného prostoru k podvarietě.

Diferencovatelnost řádu m je pak definována jako existence a spojitost parciálních derivací až do řádu m včetně.

3.2. Definice. *Parametrizace* v $\mathcal{E}$ je bijektivní diferencovatelné zobrazení $r : U \to \mathcal{E}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^k$ je otevřená množina. Analogicky se definuje parametrizace $U \to \mathbf{V}$ v zaměření $\mathbf{V}$.

Označme $x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$ obecný bod o souřadnicích $x^1, \dots, x^k$ (jak je v geometrii zvykem, souřadnice indexujeme shora). Parametrizaci $r : U \to \mathcal{E}$ pak můžeme chápat jako funkci k proměnných s hodnotami $r(x) = r(x^1, \dots, x^k)$ v $\mathcal{E}$.

Zvolme ještě libovolnou afinní (nebo kartézskou) souřadnou soustavu $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. V libovolném bodě $x \in U$ pak můžeme psát $r(x) = O + y^1(x)\mathbf{e}_1 + \cdots + y^n(x)\mathbf{e}_n$, kde $y^1(x), \dots, y^n(x)$ jsou afinní souřadnice bodu $r(x) \in r(U)$. Funkce $y^i(x)$ jednoznačně určují parametrizaci r a platí

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^j} \mathbf{e}_i. \tag{9}$$

Matice koeficientů

$$J^i_j = \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^j} \tag{10}$$

(s řádkovým indexem i a sloupcovým j) je *Jacobiho matice*, má k sloupců a n řádků.

3.3. Definice. Parametrizace $r : U \to \mathcal{E}$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$, se nazývá *regulární*, jestliže má jeho Jacobiho matic hodnost k.

3.4. Tvrzení. *Regularita nezávisí na volbě afinní souřadné soustavy* $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Důkaz. Při jiné volbě $(\bar{O}, \bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n)$ máme

$$\bar{O} = O + \sum_k q^j \mathbf{e}_j, \qquad \bar{\mathbf{e}}_i = \sum_k Q^j_i \mathbf{e}_j,$$

kde matice Q^j_i je regulární (je to matice přechodu). Z rovnosti $O + \sum_i y^i(x)\mathbf{e}_i = r(x) = \bar{O} + \sum_i \bar{y}^i(x)\bar{\mathbf{e}}_i$ snadno obdržíme vztah $y^j(x) = q^j + \sum_i Q^j_i \bar{y}^i(x)$. Derivováním získáme (protože q^j i Q^j_i jsou konstanty) následující jednoduchý vztah:

$$J = Q\bar{J}.$$

Tudíž, Jacobiho matice J a $\bar{J}$ mají stejnou hodnost.

V dalším budeme automaticky předpokládat regulární parametrizace. V analýze se dokazuje, že zobrazení s Jacobiho maticí maximální hodnosti je lokálním difeomorfismem. To znamená, že každý bod $a \in U$ má okolí $V \subseteq U$ takové, že $r|_V : V \to r(V)$ je difeomorfismus, potažmo bijekce.

Globální parametrizace podvariet (na rozdíl od křivek) nemusí existovat. To znamená, že ne každá podvarieta je obrazem $r(U)$ nějaké parametrizace. Podvarietu definujeme jako sjednocení konečně mnoha obrazů $r_i(U_i)$, které se mohou překrývat; na průnicích musí být splněny jisté podmínky, které upřesníme níže.

Příklad. Rovnicemi

$$\begin{aligned} y^1 &= (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2, \\ y^2 &= (R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2, \\ y^3 &= R_1 \sin x^1 \end{aligned} \tag{11}$$

je zadána parametrizace $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ anuloidu $r(\mathbb{R}^2)$ v $\mathbb{R}^3$, který vznikne rotací kružnice o poloměru R_1 podél kružnice o poloměru R_2, přičemž $R_1 < R_2$. Zde jsou x^1, x^2 souřadnice v $\mathbb{R}^2$ a y^1, y^2, y^3 souřadnice v $\mathbb{R}^3$. Jestliže necháme souřadnice x^i probíhat vždy celou přímku $\mathbb{R}$, pak uvedená parametrizace pokrývá anuloid několikanásobně.

Snadno vypočteme Jacobiho matici:

$$J_r = \begin{pmatrix} -R_1 \sin x^1 \cos x^2 & -(R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2 \\ -R_1 \sin x^1 \sin x^2 & (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2 \\ R_1 \cos x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Její hodnost je rovna 2 ve všech bodech $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ (ověřte). Jedná se tedy o regulární parametrizaci.

Příklad. Rovnicemi

$$\begin{aligned} y^1 &= \cos x^1 \cos x^2 \cdots \cos x^{n-2} \cos x^{n-1}, \\ y^2 &= \cos x^1 \cos x^2 \cdots \cos x^{n-2} \sin x^{n-1}, \\ &\dots, \\ y^{n-2} &= \cos x^1 \cos x^2 \sin x^3, \\ y^{n-1} &= \cos x^1 \sin x^2, \\ y^n &= \sin x^1 \end{aligned} \tag{12}$$

je zadána parametrizace $r : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sféry $S^{n-1} = r(\mathbb{R}^{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$. Zde jsou $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ souřadnice v $\mathbb{R}^{n-1}$ a $y^1, y^2, \dots, y^n$ souřadnice v $\mathbb{R}^n$. Také tato parametrizace pokrývá sféru několikanásobně, pokud necháme x^i probíhat celou přímku $\mathbb{R}$. Je regulární v bodech ve všch bodech, kde $\cos x^1 \neq 0, \dots, \cos x^{n-2} \neq 0$. V ostatních bodech je singulární. Nazývá se sférická souřadná soustava.

Cvičení. Vypočtěte Jacobiho matici sférické souřadné soustavy.

3.2. Reparametrizace

Je-li $\phi : \bar{U} \longrightarrow U$ difeomorfismus otevřených množin, pak je $\bar{r} = r \circ \phi : \bar{U} \longrightarrow \mathcal{E}$ jiná parametrizace téže podvariety $r(U) = \bar{r}(\bar{U})$. Difeomorfismus $\phi : \bar{U} \longrightarrow U$ se nazývá *reparametrizace.* Reparametrizace je v souřadnicích zadána rovnicí $x = \phi(\bar{x})$, čili soustavou $x^i = \phi^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k)$, kde $\phi^i : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné funkce.

Vraťme se nyní k definici obecné podvariety pokryté několika lokálními parametrizacemi $r_i : U_i \longrightarrow \mathcal{E}$. Na průnicích parametrizací se jedna od druhé musí lišit reparametrizací.

3.5. Definice. Buď $M \subseteq \mathcal{E}$ podmnožina, buďte $r_i : U_i \longrightarrow \mathcal{E}$, $i = 1, \dots, m$, regulární parametrizace takové, že $M = \bigcup_{i=1}^m r_i(U_i)$. Mají-li obrazy $r_i(U_i)$ a $r_j(U_j)$ neprázdný průnik $r_i(U_i) \cap r_j(U_j)$, požadujeme, že

(i) vzor $U_{ij} := r_i^{-1}(r_i(U_i) \cap r_j(U_j))$ je otevřená podmnožina v U_i;
(ii) vzor $U_{ji} := r_j^{-1}(r_i(U_i) \cap r_j(U_j))$ je otevřená podmnožina v U_j;
(iii) zobrazení $r_i|_{U_{ij}}^{-1} \circ r_j|_{U_{ji}} : U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$ je difeomorfismus (tj. reparametrizace).

Pak se množina M nazývá podvarieta v $\mathcal{E}$.

3.6. Poznámka. Podvarieta v eukleidovském prostoru je speciálním případem variety, kterou ale v této přednášce nedefinujeme. Varieta ke své existenci nepotřebuje žádný vnější prostor $\mathcal{E}$.

Příklad. Jednotková sféra se středem O je množina $S^2 = \{A \in \mathbb{R}^3 \mid d(A,O) = 1\}$ bodů, které mají jednotkovou vzdálenost od bodu O. Ukažme, že se jedná o podvarietu. Zvolíme-li kartézskou souřadnou soustavu se středem O, můžeme psát $S^2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Lokální parametrizací je například

$$x = \cos\phi\cos\theta,$$
$$y = \sin\phi\cos\theta,$$
$$z = \sin\theta,$$

kde $0 < \phi < 2\pi$ je "zeměpisná délka" a $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ je "zeměpisná šířka." Pokrývá celou sféru kromě "poledníku" $\phi = 0$ (včetně obou pólů), čili půlkružnice $x = \cos\theta$, $y = 0$, $z = \sin\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Jinou lokální parametrizaci obdržíme záměnou x...

$$z = \cos\phi\cos\theta,$$
$$x = \cos\phi\sin\theta,$$
$$y = \sin\phi.$$

kde $0 < \phi < 2\pi$ je "zeměpisná délka" a $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ je "zeměpisná šířka."

....

Jacobiho matice J_ϕ difeomorfismu ϕ má složky

$$(J_\phi)^i_j = \frac{\partial\phi^i}{\partial x^j}.$$

Její determinant, jacobián $\Delta_\phi = \det J_\phi$, je v definičním oboru $\bar{U}$ všude nenulový. Je-li definiční obor $\bar{U}$ souvislá množina, platí buď $\Delta_\phi > 0$ anebo $\Delta_\phi < 0$. V prvním případě říkáme, že reparametrizace *zachovává orientaci*, ve druhém říkáme, že *mění orientaci.*

Reparametrizace s kladným jacobiánem se nazývá *souhlasná.* Dvě parametrizace, lišící se reparametrizací s kladným jacobiánem, rovněž nazýváme *souhlasné.* Podobně jako u křivek se množina všech parametrizací podvariety rozpadá na dvě třídy vzájemně souhlasných parametrizací. podvarieta spolu se zadanou třídou souhlasných parametrizací se nazývá *orientovaná podvarieta.*

Za geometrické považujeme ty vlastnosti podvariet, které nezávisí na volbě parametrizace nebo alespoň souhlasné parametrizace. V druhém případě jde o geometrické vlastnosti orientovaných podvariet.

3.3. Derivace podél vektoru

V teorii křivek jsme vystačili s derivováním podle parametru. Derivace měla názorný smysl rychlosti pohybu po dráze. Při reparametrizaci se výsledky lišily poměrně jednoduchým faktorem. Tečný vektor (normovaný) byl, až na znaménko, v každém bodě jediný.

V případě regulární parametrizace $r : U \to \mathcal{E}$ s $U \subseteq \mathbb{R}^k$ je situace mnohem komplikovanější. Parciální derivace v prostoru $\mathbb{R}^k$ jsou pevně spojeny s volbou souřadnic v $\mathbb{R}^k$ a při reparametrizaci se jako faktor objeví Jacobiho matice. Tečných vektorů je kontinuum i když je normujeme.

Tečné vektory k podvarietě zavedeme jako derivace. Každý tečný vektor bude mít svůj vzor v prostoru parametrů $\mathbb{R}^k$. Nejdříve připomeňme, že vektory z $\mathbb{R}^k$ lze interpretovat jako derivace ve směru. Buď $a = (a^1, \ldots, a^k) \in U$ bod, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^k) \in \mathbb{R}^k$ vektor (představujeme si jej umístěný v bodě a) a $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Pak definujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}f &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\mathbf{u}) - f(a)}{h} = \frac{df(a+h\mathbf{u})}{dh}\bigg|_{h=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=a} \frac{d(a^i + hu^i)}{dh}\bigg|_{h=0} = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=a} u^i \end{aligned} \tag{13}$$

(druhé rovnítko odpovídá aplikaci l'Hôpitalova pravidla). Uvedený výpočet ukazuje, že vektor $\mathbf{u}$ působí na funkci $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ jako diferenciální operátor

$$\mathbf{u} = \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x=a}. \tag{14}$$

Nazývá se operátor derivování podél vektoru $\mathbf{u}$ v bodě a.

Prostřednictvím formule (14) si vektor $\mathbf{u}$ a operátor derivování podél vektoru $\mathbf{u}$ vzájemně jednoznačně odpovídají, a proto lze jeden ztotožnit s druhým. Přitom vektoru $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ s jedničkou na $i$tém místě odpovídá operátor parciální derivace $\partial/\partial x^i|_{x=a}$ v bodě a, v němž je vektor umístěn. Můžeme pak říci, že operátory parciálního derivování tvoří bázi v prostoru $\mathbb{R}^k$. V této bázi má vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ souřadnice u^i, jak okamžitě plyne z formule (14).

Jistě nikoho nepřekvapí, že derivace podél dráhy je totožná s derivací podél příslušného tečného vektoru:

3.7. Tvrzení. *Buď $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funkce, buď $s : I \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ dráha. Pak pro libovolné $t_0 \in I$ je derivace funkce $f \circ s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě t_0 rovna derivaci funkce $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ podél tečného vektoru $\dot{s}(t_0)$.*

Důkaz. Jsou-li $x^i = s^i(t)$ parametrické rovnice dráhy s, pak podle (13) platí

$$\frac{d(f\circ s)(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=s(t_0)} \frac{ds^i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \mathbf{u}f$$

kde $\mathbf{u} = ds^i(t)/dt|_{t=t_0} = \dot{s}(t_0)$ v bodě $s(t_0)$.

3.4. Tečné vektory

Interpretace vektorů jako derivování je v geometrii velmi výhodná, ale prozatím jsme jí dosáhli jen pro vektory v $\mathbb{R}^k$. Snadno ji však přeneseme na vektory v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. K tomu nám pomůže parametrizace a s ní spojené velmi důležité lineární zobrazení r_*, které nyní zavedeme.

V následující definici vystupují dříve zavedené parciální derivace (8).

3.8. Definice. Buď $a \in \mathbb{R}^k$ pevně zvolený bod. Je-li $r : U \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace, $a \in U$ a $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^k) \in \mathbb{R}^k$ vektor umístěný v bodě a, definujeme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}r &= \lim_{h\to 0} \frac{r(a+h\mathbf{u}) - r(a)}{h} = \frac{dr(a+h\mathbf{u})}{dh}\bigg|_{h=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial r(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=a} \frac{d(a^i + hu^i)}{dh}\bigg|_{h=0} = \sum_i \mathbf{r}_i(a)u^i, \end{aligned} \tag{15}$$

kde $\mathbf{r}_i(a)$, jako již dříve, označuje parciální derivaci $\partial r(x)/\partial x^i|_{x=a}$.

Dále definujeme zobrazení $r_* : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbf{V}$ předpisem

$$r_*(\mathbf{u}) = \mathbf{u}r. \tag{16}$$

3.9. Tvrzení. *Zobrazení $r_* : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbf{V}$ jsou lineární.*

Důkaz. Plyne bezprostředně z formule (15).

Často se lineární zobrazení r_* označuje dr, to jest, $dr(\mathbf{u}) = r_*\mathbf{u} = \mathbf{u}r$. Formule (15) pak má snadno zapamatovatelný tvar

$$dr = \sum_i \frac{\partial r(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=a} dx^i,$$

přičemž $dx^i(\mathbf{u}) = u^i = \mathbf{u}x^i$. My se budeme přidržovat značení r_*.

Následující tvrzení je obdobou Tvrzení 3.7.

3.10. Tvrzení. *Buď $r : U \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace, buď $s : I \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ dráha. Pak pro libovolné $t \in I$ je tečný vektor k dráze $r \circ s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ v bodě $r(t)$ roven vektoru $r_*(\dot{s}(t))$.*

Důkaz. Dráha $s : I \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ nechť je popsána rovnicemi $x^i = s^i(t)$. Snadno vypočteme derivaci $(r \circ s)^{\bullet}$ v bodě $t = t_0$:

$$\frac{d(r \circ s)(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \sum_i \frac{\partial r(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=a} \frac{ds^i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} = r_*(\dot{s}(t_0)).$$

Poznamenejme na závěr, že definice lze rozšířit i na vektory v zaměření $\mathbf{V}$ eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$ a diferencovatelná funkce $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ tak, že platí analogie Tvrzení 3.7. Potom existuje souvislost mezi derivováním podél vektoru $\mathbf{u}$ a derivováním podél jeho obrazu $r_*(\mathbf{u})$.

3.11. Tvrzení. *Buď $r : U \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace, $a \in U$ bod, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ vektor umístěný v bodě a. Buď $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Pak pro derivaci složené funkce $f \circ r : U \longrightarrow \mathbb{R}$ podél vektoru $\mathbf{u}$ platí*

$$\mathbf{u}(f \circ r) = r_*(\mathbf{u})f. \tag{17}$$

Důkaz. Je-li $\mathbf{u}$ tečný vektor ke dráze $s : I \longrightarrow U$ v bodě $a = s(t_0)$, pak oba výrazy vyjadřují

$$\frac{d(f \circ r \circ s)(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}.$$

3.5. Tečný prostor k ploše

Pro jednoduchost budeme od tohoto místa mlčky předpokládat, že parametrizace je injektivní. Pokud není, omezíme se na vhodnou podmnožinu. Speciálně to znamená, že uvažujeme o části podvariety, která sama sebe neprotíná.

Podobně jako křivky v $\mathcal{E}$ mají tečny, podvariety v $\mathcal{E}$ mají tečné prostory. Tečný prostor k ploše $r(U)$ v bodě $r(a)$ je vektorový podprostor v zaměření $\mathbf{V}$ eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$. Značí se $T_{r(a)}r(U)$ a je obrazem vektorového prostoru $\mathbb{R}^k$ při lineárním zobrazení $r_* : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbf{V}$.

3.12. Definice. Buď $r : U \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace a $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^k) \in \mathbb{R}^k$ vektor umístěný v bodě $a \in \mathbb{R}^k$. Tečný prostor $T_{r(a)}r(U)$ k ploše $r(U)$ v bodě $r(a)$ je definován jako obraz homomorfismu r_*, čili jako lineární obal vektorů $\mathbf{r}_i(a) = \partial r(x)/\partial x^i|_{x=a}$:

$$T_{r(a)}r(U) = \operatorname{Im} r_* = \left[\!\!\left[\frac{\partial r(x)}{\partial x^1}\bigg|_{x=a}, \dots, \frac{\partial r(x)}{\partial x^k}\bigg|_{x=a} \right]\!\!\right]. = [\![\mathbf{r}_1(a), \dots, \mathbf{r}_k(a)]\!]. \tag{18}$$

Z Tvrzení 3.10 plyne následující geometrický smysl tečného prostoru:

3.13. Důsledek. *Tečný prostor $T_{r(a)}r(U)$ je množina všech tečných vektorů k obrazům $r \circ s$ drah $s : I \longrightarrow U$ procházejících bodem $a \in U$.*

Je-li parametrizace podvariety regulární, je zobrazení $r_* : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{r(a)}r(U)$, dané formulí (16), izomorfismus vektorových prostorů. Plyne to okamžitě z definice regularity.

Příklad. Obecné rovnice jednotkové sféry se středem v bodě O jsou $\|r - O\| = 1$. Při libovolné regulární parametrizaci proto máme (podobně jako v Tvrzení 2.9)

$$\frac{\partial r(x)}{\partial x^j} \cdot r(x) = 0$$

pro každé $i = 1, \dots, n-1$. Vidíme, že tečné vektory $\partial r(x)/\partial x^j$ jsou kolmé k poloměru $r(x) - O$. Jinak řečeno, tečný prostor je kolmý k vektoru $r(x) - O$, tudíž je ortogonálním doplňkem $[\![r(x) - O]\!]^\perp$.

Příklad. Přepočítejme předchozí příklad v parametrizaci (12). Pro jednoduchost se omezme na případ $n = 3$, tj.

$$\begin{aligned} y^1 &= \cos x^1 \cos x^2, \\ y^2 &= \cos x^1 \sin x^2, \\ y^3 &= \sin x^1. \end{aligned}$$

Jacobiho matici

$$J_r = \begin{pmatrix} -\sin x^1 \cos x^2 & -\cos x^1 \sin x^2 \\ -\sin x^1 \sin x^2 & \cos x^1 \cos x^2 \\ \cos x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

jste vypočetli v jednom z předchozích cvičení. Její sloupce jsou tečné vektory $\partial r/\partial x^j$ a snadno se ověří, že jsou kolmé k vektoru

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x^1 \cos x^2 \\ \cos x^1 \sin x^2 \\ \sin x^1 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^3$.

3.14. Definice. Buď $r : U \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Soustava parametrizovaných křivek

$$t \longmapsto r(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n),$$

kde $i = 1, \dots, k$ a $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ probíhá množinu U, se nazývá *souřadnicová síť*.

Vektory $\mathbf{r}_j = \partial r/\partial x^j$ jsou zřejmě tečnými vektory k parametrizovaným křivkám souřadnicové sítě.

3.6. První fundamentální forma

Jak víme z předškolního věku, rovný drát lze libovolně ohýbat, ale naplatí to pro list papíru. Můžeme z něj vytvořit válcovou nebo kuželovou plochu, ale nelze jím obalit kouli bez záhybů. (Pokud skutečný list papíru není kombinací válcových a kuželových ploch, je to jen proto, že neroztažitelný papír neexistuje.) Tato vlastnost je odrazem faktu, že podvariety mají, na rozdíl od křivek, vnitřní geometrii.

Připomeňme, že skalární součin je bilineární forma na zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathcal{E}$, tedy zobrazení $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, které je lineární v obou argumentech. V případě regulární parametrizace $r : U \to \mathcal{E}$ ji můžeme prostřednictvím zobrazení $r_* : \mathbb{R}^k \to T_{r(a)} r(U)$ snadno přenést na definiční obor $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Argumenty potom budou vektory z $\mathbb{R}^k$ a obdržíme tzv. první fundamentální formu.

3.15. Definice. Buď r parametrizace a $a \in U$ bod. Předpisem

$$\mathrm{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = r_*(\mathbf{u}) \cdot r_*(\mathbf{v}). \tag{19}$$

je zadána bilineární forma I na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^k$. Nazývá se *první fundamentální forma* podvariety $r(U)$ v bodě $r(a)$ nebo zkráceně *metrika.*

Pro vektory $\mathbf{u} = \sum_i u^i \, \partial/\partial x^i$, $\mathbf{v} = \sum_i v^i \, \partial/\partial x^i$ s použitím formule (16) dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = r_*(\mathbf{u}) \cdot r_*(\mathbf{v}) &= \left(\sum_i \frac{\partial r(x)}{\partial x^i} u^i \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} v^j \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial r(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r(x)}{\partial x^i} u^i v^j = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j,\end{aligned}$$

kde jsme označili

$$g_{ij} = \frac{\partial r(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r(x)}{\partial x^j} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j.$$

Funkce g_{ij} se nazývají *koeficienty první fundamentální formy.* Používá se i zápis

$$\mathrm{I} = \sum_{i,j} g_{ij} \, dx^i \, dx^j,$$

který umožňuje počítat

$$\mathrm{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} g_{ij} \, dx^i(\mathbf{u}) \, dx^j(\mathbf{v}) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j.$$

Příklad. Vypočtěme první fundamentální formu anuloidu v parametrizaci (11), tj.

$$\begin{aligned} y^1 &= (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2, \\ y^2 &= (R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2, \\ y^3 &= R_1 \sin x^1. \end{aligned}$$

Derivace $\partial \mathbf{r}/\partial x^i$ jsme již dříve vypočetli jako sloupce Jacobiho matice:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \begin{pmatrix} -R_1 \sin x^1 \cos x^2 \\ -R_1 \sin x^1 \sin x^2 \\ R_1 \cos x^1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -(R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2 \\ (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Složky g_{ij} metriky vypočteme jako součiny

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = R_1^2, \\ g_{12} &= g_{21} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \\ g_{22} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = (R_1 \cos x^1 + R_2)^2. \end{aligned}$$

Příklad. Složky první fundamentální formy sféry S^2 v parametrizaci (12) jsou

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = 1, \\ g_{12} &= g_{21} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \\ g_{22} &= \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = (\cos x^1)^2. \end{aligned}$$

Cvičení. Vypočtěte složky první fundamentální formy sféry S^{n-1} v parametrizaci (12).

Cvičení. Loxodroma na sféře S^2 je křivka, svírající konstantní úhel s poledníky. Po loxodromě pluje loď, která udržuje stále stejný kurs, měřený odchylkou kompasu (poledníky se pro tento účel rozumějí hlavní kružnice procházející magnetickými póly).

1. Nalezněte loxodromu se zadanou odchylkou α od poledníků.
2. Nalezněte loxodromu procházející zadanými body.

Jak první fundamentální forma odráží vnitřní geometrii podvariety $r(U)$? Umožňuje nám například počítat délky křivek na $r(U)$.

3.16. Tvrzení. *Buď $s : I \to U$ zobrazení otevřeného intervalu do definičného oboru U parametrizace r podvariety $r(U)$. Buďte $t_1, t_2 \in I$ dva body. Délka křivky $r \circ s$ mezi body $r(s(t_1))$ a $r(s(t_2))$ je rovna*

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathrm{I}(\dot{s}, \dot{s})}\, dt$$

Důkaz. Je-li křivka s zadána rovnicemi $x^i = s^i(t)$, pak podle Tvrzení 2.13 a příslušných definic platí

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathrm{I}(\dot{s}, \dot{s})}\, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r_*(\dot{s}) \cdot r_*(\dot{s})}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \|r_*(\dot{s})\|\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{ds^i}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{dr(s(t))}{dt} \right\| dt = \ell_{r\circ s}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Cvičení. Určete délku loxodromy procházející zadanými body.

3.7. Vektorová pole

V geometrii potřebujeme i druhé derivace. Narážíme však na problém, že první derivace podél vektoru je číslo a nikoliv funkce, a proto ji nelze dále derivovat. Aby byla výsledkem derivování funkce opět funkce, musíme ji podle nějakého vektoru derivovat v každém bodě definičního oboru. Potažmo musíme v každém bodě definičního oboru nějaký vektor mít. Docházíme tak k pojmu vektorového pole.

3.17. Definice. Vektorové pole na podmnožině $M \subseteq \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné zobrazení $M \to \mathbb{R}^k$. Hodnota vektorového pole $\mathbf{u}$ v bodě $a \in M$ je vektor, který označujeme $\mathbf{u}_a$. Aplikací vektorového pole $\mathbf{u}$ na diferencovatelnou funkci $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ rozumíme funkci $\mathbf{u}f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem $(\mathbf{u}f)(a) = \mathbf{u}_a f$.

Analogicky se definuje vektorové pole na podmnožině $M \subseteq \mathcal{E}$ eukleidovského prostoru se zaměřením $\mathbf{V}$ jako diferencovatelné zobrazení $M \to \mathbf{V}$.

Poznamenejme, že množina M z předchozí definice může být vcelku libovolná. Jako speciální případ můžeme zavést například vektorové pole na křivce, aniž bychom museli nutně předpokládát, že je tečné.

Obecné vektorové pole na $M \subseteq \mathbb{R}^k$ je popsáno formulí

$$\mathbf{u} = \sum_i u^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde $u^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné funkce (nikoliv čísla, jako doposud). Potřebná třída diferencovatelnosti je závislá na řešené úloze.

Buď $r : U \longrightarrow \mathcal{E}$ parametrizace. První fundamentální forma v libovolném pevně zvoleném bodě je 2-lineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^k$. Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorová pole na U, v každém bodě $a \in U$ obdržíme číslo $I(\mathbf{u}_a, \mathbf{v}_a)$. Výraz $I(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ proto můžeme považovat za funkci na U. První fundamentální forma tedy přiřazuje dvojicím vektorových polí na U funkci na U.

Je-li dáno vektorové pole na podmnožině $M \subseteq U$, můžeme předpisem $(r_*\mathbf{u})_{r(a)} = r_*(\mathbf{u}_a)$ definovat vektorové pole $r_*\mathbf{u}$ na $r(M)$, sestávající z tečných vektorů k $r(U)$.

3.8. Lieova závorka

U parciálních derivací jsme zvyklí, že jsou záměnné. U obecných vektorových polí v $\mathbb{R}^k$ tomu tak být nemusí:

Příklad. Nechť $\mathbf{u} = x\,d/dx$, $\mathbf{v} = d/dx$. Pak pro libovolnou funkci $f(x)$ platí $\mathbf{uv}f = x\,d^2f/dx^2$, ale $\mathbf{vu}f = df/dx + x\,d^2f/dx^2$.

Nicméně, obecně platí, že v rozdílu $\mathbf{uv}f - \mathbf{vu}f$ se členy s derivacemi druhého řádu vzájemně vyruší. Zbývající členy s derivacemi prvního řádu odpovídají akci některého vektorového pole.

3.18. Tvrzení. *Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorová pole třídy alespoň C^1, definovaná na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Pak existuje vektorové pole $\mathbf{w}$ na U takové, že pro libovolnou C^2 diferencovatelnou funkci $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ platí $\mathbf{w}f = \mathbf{uv}f - \mathbf{vu}f$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{u} = \sum_i u^i\,\partial/\partial x^i$, $\mathbf{v} = \sum_i v^i\,\partial/\partial x^i$. Snadno vypočteme

$$\begin{aligned}
\mathbf{uv}f - \mathbf{vu}f &= \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j v_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j u_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_i \sum_j \left(u_i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + u_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - v_i \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - v_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\
&= \sum_i \sum_j \left(u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - v^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Sčítance s druhými derivacemi se vzájemně vyruší, protože součet nezávisí na pojmenování indexů. Tudíž,

$$\mathbf{w} = \sum_i w^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{kde } w^i = \mathbf{u}v^i - \mathbf{v}u^i = \sum_j \left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right).$$

3.19. Definice. Vektorové pole $\mathbf{w}$ z předchozího tvrzení se nazývá *Lieova závorka* vektorových polí $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a značí se $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$. Platí tedy

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]f = \mathbf{u}\mathbf{v}f - \mathbf{v}\mathbf{u}f$$

pro libovolnou diferencovatelnou funkci $f : U \to \mathbb{R}$ resp. $f : r(U) \to \mathbb{R}$.

Protože se s jinou závorkou než Lieovou v tomto nesetkáme, budeme jí říkat prostě jen závorka. Nejsnáze se vzorec pro výpočet závorky zapamatuje takto: Výsledek $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ je rozdílem dvou členů. První vznikne aplikací pole $\mathbf{u}$ na koeficienty pole $\mathbf{v}$, druhý naopak.

Cvičení. Vypočtěte závorku

$$\Big[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Big]. \qquad \text{(Výsledek: } -\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial y}\text{).}$$

3.9. Kovariantní derivace

Podobně jako u křivek, derivace $\mathbf{u}\mathbf{v}r$ tečného vektoru $\mathbf{v}r$ k podvarietě obvykle není tečným vektorem. Projekcí do tečného prostoru k podvarietě obdržíme vektorové pole, které se označuje $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ a nazývá se kovariantní derivace pole $\mathbf{v}$ podél pole $\mathbf{u}$.

Upřesněme to. Buďte $\mathbf{u},\mathbf{v}$ dvě vektorová pole na $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Uvažujme o druhé derivaci $\mathbf{u}\mathbf{v}r$. V každém bodě $a \in U$ dostáváme vektor $\mathbf{u}_a\mathbf{v}r$ v zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathcal{E}$. V každém bodě $r(a) \in r(U)$ máme i tečný prostor $T_{r(a)}$ a kolmou projekci $\mathrm{pr}_T : \mathbf{V} \to T_{r(a)}$ do něj. Promítáním vektoru $\mathbf{u}_a\mathbf{v}r$ dostáváme tečný vektor $\mathrm{pr}_T\mathbf{u}_a\mathbf{v}r \in T_{r(a)}$. Jelikož r_* je bijekce mezi $\mathbb{R}^k$ a tečným prostorem $T_{r(a)}$, existuje vzor $r_*^{-1}\mathrm{pr}_T\mathbf{u}_a\mathbf{v}r \in \mathbb{R}^k$, který označíme $\nabla_{\mathbf{u}_a}\mathbf{v}$.

3.20. Definice. Přiřazení $u \mapsto \nabla_{\mathbf{u}_a}\mathbf{v}$ určuje vektorové pole $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ na $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Nazývá se *kovariantní derivace* pole $\mathbf{v}$ podél pole $\mathbf{u}$. Symbolicky

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = r_*^{-1}\mathrm{pr}_T\mathbf{u}\mathbf{v}r. \tag{20}$$

Formuli (20) můžeme ekvivalentně přepsat jako

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v})r = r_*\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathrm{pr}_T\mathbf{u}\mathbf{v}r. \tag{21}$$

Vypočtěme $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ v souřadnicích.

3.21. Tvrzení. *Pro vektorová pole* $\mathbf{u} = \sum_i u^i\,\partial/\partial x^i$, $\mathbf{v} = \sum_i v^i\,\partial/\partial x^i$ *platí*

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \sum_{i,j} u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k}\Gamma^k_{ij}u^iv^j\frac{\partial}{\partial x^k},$$

kde Γ^k_{ij} *jsou funkce symetrické v dolních indexech,*

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

a splňují rovnost

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{22}$$

Důkaz. Počítejme

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v})r &= \mathrm{pr}_T\mathbf{u}\mathbf{v}r = \mathrm{pr}_T\sum_i u^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j v^j\frac{\partial r(x)}{\partial x^j}\right)\\
&= \mathrm{pr}_T\sum_{i,j}\left(u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial r(x)}{\partial x^j} + u^i v^j\frac{\partial^2 r(x)}{\partial x^i\,\partial x^j}\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial r(x)}{\partial x^j} + u^i v^j\mathrm{pr}_T\frac{\partial^2 r(x)}{\partial x^i\,\partial x^j}\right)\\
&= \sum_{i,j}u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial r(x)}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k}\Gamma^k_{ij}u^i v^j\frac{\partial r(x)}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

Čtvrtá rovnost plyne z toho, že první sčítaný výraz v tečném prostoru leží. Pátou rovností se zavádí označení

$$
\mathrm{pr}_T\frac{\partial^2 r(x)}{\partial x^i\,\partial x^j} = \sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial r(x)}{\partial x^k}, \tag{23}
$$

které zároveň implikuje poslední tvrzení.

3.22. Definice. Funkce Γ^k_{ij} se nazývají *Christoffelovy symboly.*

3.23. Tvrzení. *Pro Christoffelovy symboly platí*

$$
\Gamma^k_{ij} = \frac{\Delta^k_{ij}}{\Delta}
$$

kde

$$
\Delta = \begin{vmatrix}\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{r}_n\cdot\mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_n\cdot\mathbf{r}_n\end{vmatrix}
$$

je determinant matice první kvadratické formy a

$$
\Delta^k_{ij} = \begin{vmatrix}\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_{ij} & \cdots & \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_n\\ \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{r}_n\cdot\mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_n\cdot\mathbf{r}_{ij} & \cdots & \mathbf{r}_n\cdot\mathbf{r}_n\end{vmatrix},
$$

obdržíme záměnou pravého součinitele $\mathbf{r}_k$ *v ktém sloupci za druhou derivaci* $\mathbf{r}_{ij} = \partial^2 r/\partial x^i\,\partial x^j$.

Důkaz. Platí

$$
\mathrm{pr}_T\mathbf{r}_{ij} = \sum_k\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k
$$

a současně

$$
\mathrm{pr}_T\mathbf{r}_{ij} = \sum_k\frac{\Delta^{(k)}(\mathbf{r}_{ij})}{\Delta}\mathbf{r}_k
$$

podle vzorce pro kolmou projekci odvozeného v části o lineárních útvarech (v podstatě jde o Kramerovo pravidlo). Odtud

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\Delta^{(k)}(\mathbf{r}_{ij})}{\Delta}.$$

Přitom

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n \end{vmatrix}$$

je determinant matice první fundamentální formy a

$$\Delta^{(k)}(\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w} & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_n \\ \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_1 & \cdots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{w} & \cdots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n \end{vmatrix},$$

kde skalární součiny s $\mathbf{w}$ stojí v $k$tém sloupci. Odtud tvrzení.

Příklad. Vypočtěme Christoffelovy symboly anuloidu v parametrizaci

$$y^1 = (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2,$$
$$y^2 = (R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2,$$
$$y^3 = R_1 \sin x^1.$$

Připomeňme, že bázové tečné vektory jsou

$$\mathbf{r}_1 := \frac{\partial r}{\partial x^1} = \begin{pmatrix} -R_1 \sin x^1 \cos x^2 \\ -R_1 \sin x^1 \sin x^2 \\ R_1 \cos x^1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2 := \frac{\partial r}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -(R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2 \\ (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dále budeme potřebovat i druhé derivace

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{pmatrix} -R_1 \cos x^1 \cos x^2 \\ -R_1 \cos x^1 \sin x^2 \\ -R_1 \sin x^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{12} = \begin{pmatrix} R_1 \sin x^1 \sin x^2 \\ -R_1 \sin x^1 \cos x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{22} = \begin{pmatrix} -(R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2 \\ -(R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice první fundamentální formy je

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1^2 & 0 \\ 0 & (R_2 + R_1 \cos x^1)^2 \end{vmatrix} = R_1^2 (R_2 + R_1 \cos x^1)^2.$$

Další potřebné determinanty vyjdou

$$\Delta^1_{11} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta^2_{11} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{11} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta^1_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta^2_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} \end{vmatrix} = (R_2 + R_1 \cos x^1)^3 R_1 \sin x^1,$$

$$\Delta^1_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \end{vmatrix} = -(R_2 + R_1 \cos x^1) R_1^3 \sin x^1, \quad \Delta^2_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{22} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud

$$\Gamma^1_{22} = \frac{R_2 + R_1 \cos x^1}{R_1} \sin x^1, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{R_1}{R_2 + R_1 \cos x^1} \sin x^1,$$

zatímco ostatní Christoffelovy symboly jsou rovny nule.

Cvičení. Vypočtěte Christoffelovy symboly sféry v obvyklých sférických souřadnicích.

Později najdeme vyjádření Christofflových symbolů pomocí metriky. Předtím však musíme stanovit několik dalších vlastností kovariantní derivace.

3.24. Tvrzení. *Kovariantní derivace* (20) *splňuje*

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}, \\
&\nabla_{f\mathbf{u}}\mathbf{w} = f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \\
&\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}, \\
&\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{w}) = (\mathbf{u}f)\mathbf{w} + f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}
\end{aligned}$$

(výraz $(\mathbf{u}f)\mathbf{w}$ *na posledním řádku je součin fukce a vektorového pole).*

Důkaz. Dokážeme poslední vztah, přenechavše laskavému čtenáři všechny ostatní jako cvičení.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{w}) &= r_*^{-1}\mathrm{pr}_T\mathbf{u}(f\mathbf{w})r = r_*^{-1}\mathrm{pr}_T\mathbf{u}(f\mathbf{w}r) = r_*^{-1}\mathrm{pr}_T((\mathbf{u}f)\mathbf{w}r + f\mathbf{u}\mathbf{w}r) \\
&= (\mathbf{u}f)r_*^{-1}\mathrm{pr}_T\mathbf{w}r + r_*^{-1}\mathrm{pr}_T(f\mathbf{u}\mathbf{w}r) = (\mathbf{u}f)\mathbf{w} + f\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w},
\end{aligned}$$

protože $r_*^{-1}\mathrm{pr}_T\mathbf{w}r = r_*^{-1}\mathbf{w}r = r_*^{-1}r_*\mathbf{w} = \mathbf{w}$.

Kovariantní derivace první fundamentální formy splňuje analogii Leibnizova pravidla.

3.25. Tvrzení. *Platí*

$$\mathbf{w}(I(\mathbf{u},\mathbf{v})) = I(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + I(\mathbf{u},\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v})$$

(výraz na levé straně je derivace funkce $I(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *podél vektorového pole* $\mathbf{w}$*).*

Důkaz. S použitím vztahu (21) obdržíme

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(I(\mathbf{u},\mathbf{v})) &= \mathbf{w}(\mathbf{u}r\cdot\mathbf{v}r) = \mathbf{w}\mathbf{u}r\cdot\mathbf{v}r + \mathbf{u}r\cdot\mathbf{w}\mathbf{v}r = \mathrm{pr}_T\mathbf{w}\mathbf{u}r\cdot\mathbf{v}r + \mathbf{u}r\cdot\mathrm{pr}_T\mathbf{w}\mathbf{v}r \\
&= (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u})r\cdot\mathbf{v}r + \mathbf{u}r\cdot(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}r) = I(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u},\mathbf{v}) + I(\mathbf{u},\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Třetí rovnost platí, protože normálová složka (projekce do ortogonálního doplňku tečného prostoru) vektoru $\mathbf{w}\mathbf{u}r$ resp. $\mathbf{w}\mathbf{v}r$ se při skalárním násobení tečným vektorem $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{u}$ ztrácí.

3.26. Tvrzení. *Kovariantní derivace* (20) *splňuje*

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\mathbf{u},\mathbf{v}]$$

(výraz na pravé straně je závorka polí $\mathbf{u},\mathbf{v}$*).*

Důkaz. Cvičení.

3.27. Poznámka. Zobrazení ∇, přiřazující dvěma vektorovým polím třetí, s vlastnostmi uvedenými v Tvrzení 3.24, se nazývá *afinní konexe*. Má-li i vlastnost uvedenou v Tvrzení 3.26, nazývá se *konexe bez torze*. Nakonec, má-li navíc i vlastnost uvedenou v Tvrzení 3.25, nazývá se *metrická konexe*. Tudíž, vztahem (20) jsme vlastně zavedli metrickou konexi na podvarietě.

3.10. Souvislost s metrikou

Poněkud překvapivě se ukazuje, že kovariantní derivace je projevem vnitřní geometrie podvariety.

3.28. Tvrzení. *Kovariantní derivace je jednoznačně určena metrikou. Přesněji, pro Christoffelovy symboly platí*

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) g^{mk},$$

kde g^{ij} *jsou složky matice inverzní k matici* g_{ij}*, takže platí* $g^{mk} g_{kl} = \delta_{ml}$ *(Kroneckerovo delta).*

Důkaz. Dosadíme-li v Tvrzení 3.25 za vektorová pole $\mathbf{u} = \partial/\partial x^i$, $\mathbf{v} = \partial/\partial x^j$, $\mathbf{w} = \partial/\partial x^k$, dostáváme na levé straně

$$\mathbf{w}(I(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{\partial}{\partial x^k} I\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

a na pravé straně

$$\begin{aligned} I(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + I(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}) &= I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + I\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= I\left(\sum_l \Gamma^l_{ki} \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + I\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_l \Gamma^l_{kj} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \sum_l (\Gamma^l_{ki} g_{lj} + g_{il} \Gamma^l_{kj}). \end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_l (\Gamma^l_{ik} g_{jl} + \Gamma^l_{jk} g_{il}).$$

Podobný vztah musí platit i při každé vzájemé záměně polí $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, potažmo indexů i, j, k. S využitím symetrie tak dostaneme další dva vztahy:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \sum_l (\Gamma^l_{ij} g_{kl} + \Gamma^l_{jk} g_{il}),$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \sum_l (\Gamma^l_{ik} g_{jl} + \Gamma^l_{ij} g_{kl});$$

Odečteme-li druhou a třetí rovnost od první, dostaneme vztah obsahující jen Γ^l_{ij}, a sice

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = -2 \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{kl}.$$

Odtud

$$\sum_l \Gamma^l_{ij} g_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

K ukončení důkazu stačí násobit inverzní maticí g^{mk}, načež na levé straně obdržíme

$$\sum_{l,k} \Gamma^l_{ij} g_{kl} g^{mk} = \sum_l \Gamma^l_{ij} \delta^m_l = \Gamma^m_{ij}.$$

3.11. Paralelní přenos

3.29. Definice. Buď ∇ kovariantní derivace. Řekneme, že pole $\mathbf{v}$ se *paralelně přenáší* podél pole $\mathbf{u}$, jestliže $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = 0$.

Ze vztahu (20) usuzujeme, že pole $\mathbf{u}$ se paralelně přenáší podél pole $\mathbf{v}$, právě když je pole $\mathbf{uv}r$ normálové (má nulový průmět do tečného prostoru). Poznamenejme, že jde o obecně nesymetrický vztah.

3.30. Definice. Buď ρ křivka, na níž je zadáno pole $\mathbf{v}$. Řekneme, že pole $\mathbf{v}$ se *paralelně přenáší* podél křivky ρ, jestliže $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{v} = 0$, kde $\mathbf{T}$ je pole tečných vektorů ke křivce ρ.

Definice je korektní: Abychom mohli určit, zda se pole $\mathbf{v}$ paralelně přenáší či nikoliv, stačí znát jen jeho hodnoty podél této křivky. Plyne to z toho, že derivace ve směru tečného vektoru ke křivce nezávisí na hodnotách funkce mimo tuto křivku.

3.31. Tvrzení. *Pole* $\mathbf{v}$ *se paralelně přenáší podél regulárně parametrizované křivky* $x(t)$ *právě tehdy, když* $\nabla_{\dot{x}}\mathbf{v} = 0$.

Důkaz. Pro libovolnou parametrizaci $x(t)$ platí $\dot{x} = f\mathbf{T}$, kde $f = \|\dot{x}\| \neq 0$. Pro kovariantní derivace pak dostáváme $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{v} = \nabla_{f\dot{x}}\mathbf{v} = f\nabla_{\dot{x}}\mathbf{v}$ a nulovost jedné znamená nulovost druhé.

Cvičení. Opatřete si slepičí vejce, nakreslete na něj uzavřenou křivku a vektorové pole podél této křivky, které se paralelně přenáší. Dostanete při návratu do výchozího bodu stejný vektor?

Návod: Neustále natáčejte vejce tak, aby Vaše oko hledělo kolmo na malou oblast, v níž kreslíte (pak je paralelní přenos totéž, co rovnoběžnost průmětů).

3.12. Geodetiky

3.32. Definice. Křivka $r(I)$ na ploše $r(U)$ se nazývá *geodetika*, jestliže $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0$, tj. jestliže se podél ní její tečný vektor paralelně přenáší.

Pro parametrizovanou křivku $x(t)$ můžeme rovnici geodetiky zapsat jako $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$. V souřadnicích

$$\ddot{x}^k + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0. \tag{24}$$

Tato rovnice určuje geodetiku i s parametrizací (až na konstantní násobek a posunutí). Taková parametrizace se nazývá *afinní.*

Z libovolného bodu lze libovolným směrem vypustit právě jednu geodetiku. Plyne to z faktu, že rovnice geodetiky (24) je soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

Dá se ukázat, že vzdálenost dostatečně blízkých bodů na ploše se měří podél geodetiky, spojující oba body.

Cvičení. Na slepičí vejce kreslete geodetiky způsobem naznačeným v předchozím cvičení (snažte se o křivku, která je při kolmém pohledu co “nejrovnější”). Poté dva body na geodetice spojte napjatou gumičkou. Prochází gumička podél Vaší geodetiky?

Příklad. Hledejme geodetiky anuloidu jako řešení rovnice (24). Dosadíme-li dříve vypočtené Christoffelovy symboly

$$\Gamma^1_{22} = \frac{R_2 + R_1 \cos x^1}{R_1} \sin x^1, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{R_1}{R_2 + R_1 \cos x^1} \sin x^1,$$

obdržíme pro souřadnice x^1, x^2 diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} + \frac{R_2 + R_1 \cos x^1}{R_1} \sin x^1 \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2,$$
$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} - 2\frac{R_1}{R_2 + R_1 \cos x^1} \sin x^1 \frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt}.$$

Druhou rovnici lze ekvivalentně zapsat jako

$$\frac{d}{dt}\left((R_2 + R_1 \cos x^1)^2 \frac{dx^2}{dt}\right) = 0,$$

odkud

$$(R_2 + R_1 \cos x^1)^2 \frac{dx^2}{dt} = C = \text{const},$$

a tedy

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{C}{(R_2 + R_1 \cos x^1)^2}.$$

Dosazením do první rovnice obdržíme

$$R_1 \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \frac{C^2 \sin x^1}{(R_2 + R_1 \cos x^1)^3} = 0.$$

Tato rovnice již neobsahuje x^2 a je řešitelná, ovšem nikoliv v elementárních funkcích. Dalších úvah proto zanecháváme.

Cvičení. Ukažte, že hlavní kružnice jsou geodetikami sféry. Návod: Afinní parametrizací je např. parametrizace obloukem.

3.13. Normálový vektor

Od tohoto momentu budeme předpokládat, že podvarieta má dimenzi o jedničku nižší než vnější prostor, tedy $k = n - 1$, kde $n = \dim \mathcal{E}$. V takovém případě je má podvarieta normálový vektor.

Označme $N_{r(x)}$ ortogonální doplněk k tečnému prostoru $T_{r(x)}r(U)$. Jsa jednorozměrný, $N_{r(x)}$ je generován jedním vektorem. Normovaný generátor $\mathbf{n}_{r(x)} \in N_{r(x)}$ se nazývá *normálový vektor*. Je určen jednoznačně až na znaménko. Volíme-li jej konzistentně tak, aby v "blízkých" bodech ukazoval "blízkým směrem," obdržíme na ploše vektorové pole $\mathbf{n}$, které je diferencovatelné.

Příklad. Normálový vektor k jednotkové sféře $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $a \in S^{n-1}$ je vektor $a - o$, kde o je střed sféry, nebo vektor $o - a$ k předchozímu opačný.

Příklad. Vypočtěme normálové vektorové pole anuloidu (11)

$$y^1 = (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2,$$
$$y^2 = (R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2,$$
$$y^3 = R_1 \sin x^1.$$

Připomeňme, že jeho tečné prostory jsou generovány sloupci Jacobiho matice:

$$\mathbf{r}_1 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \begin{pmatrix} -R_1 \sin x^1 \cos x^2 \\ -R_1 \sin x^1 \sin x^2 \\ R_1 \cos x^1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -(R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2 \\ (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože vnější prostor je $\mathbb{R}^3$, kolmý vektor nejsnáze vypočteme jako vektorový součin $\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, jehož komponenty obdržíme rozvojem determinantu

$$\begin{vmatrix} -R_1 \sin x^1 \cos x^2 & -(R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2 & \mathbf{e}_1 \\ -R_1 \sin x^1 \sin x^2 & (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2 & \mathbf{e}_2 \\ R_1 \cos x^1 & 0 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

podle třetího sloupce. Výsledkem je

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} -(R_2 + R_1 \cos x^1) R_1 \cos x^1 \cos x^2 \\ -(R_2 + R_1 \cos x^1) R_1 \cos x^1 \sin x^2 \\ -(R_2 + R_1 \cos x^1) R_1 \sin x^1 \end{pmatrix}.$$

Normálový vektor získáme normováním tohoto vektoru. Jeho délka je

$$\|\mathbf{n}_0\| = \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = (R_2 + R_1 \cos x^1) R_1,$$

a tedy

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_0}{\|\mathbf{n}_0\|} = \begin{pmatrix} -\cos x^1 \cos x^2 \\ -\cos x^1 \sin x^2 \\ -\sin x^1 \end{pmatrix},$$

případně opačný vektor.

Cvičení. Rozhodněte, zda je normálový vektor vypočtený v předchozím příkladě orientován dovnitř anuloidu nebo vně.

3.14. Druhá fundamentální forma

Druhá fundamentální forma charakterizuje vložení podvariety $r(U)$ do prostoru $\mathcal{E}$. Připomeňme, že předpokládáme $k = n - 1$, kde $n = \dim \mathcal{E}$.

3.33. Tvrzení. *Buď $r(U)$ parametrizace dimenze $k = n - 1$, označme $\mathbf{n}$ pole normálových vektorů. Předpisem*

$$\mathrm{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{uv}r \tag{25}$$

je zadána symetrická bilineární forma v každém bodě definičního oboru $U \subseteq \mathbb{R}^k$.

Důkaz. Pro vektorová pole $\mathbf{u} = \sum_i u^i\, \partial/\partial x^i$, $\mathbf{v} = \sum_i v^i\, \partial/\partial x^i$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{n}\cdot \mathbf{uv}r = \mathbf{n}\cdot \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j v^j \frac{\partial r(x)}{\partial x^j}\right) \\ = \mathbf{n}\cdot \sum_{i,j}\left(u^i v^j \mathbf{r}_{ij} + u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\mathbf{r}_j\right) \\ = \sum_{i,j}\left(u^i v^j \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{ij} + u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j\right) = \sum_{i,j} h_{ij} v^j u^i \end{aligned}$$

kde jsme označili

$$h_{ij} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{ij}.$$

Druhý sčítanec v závorce vymizí, protože vektor $\mathbf{r}_j$ leží v tečném prostoru, k němuž je $\mathbf{n}$ kolmý. Vidíme, že hodnota $\mathrm{II}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ v bodě a lineárně závisí na hodnotě každého z koeficientů u^i, v^j. Výraz je navíc symetrický v $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, protože $h_{ij} = h_{ji}$.

Jiný důkaz. Nejdříve symetrie. Máme

$$\mathrm{II}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mathrm{II}(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{uv}r - \mathbf{vu}r) = \mathbf{n}\cdot[\mathbf{u},\mathbf{v}]r = 0,$$

protože závorka $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ je vektorové pole v $\mathbb{R}^k$, načež $[\mathbf{u},\mathbf{v}]r$ vždy leží v tečném prostoru a jeho skalární součin s normálovým vektorem v témže bodě je proto nulový.

Linearita v prvním argumentu vyplývá z vlastností skalárního součinu, linearita v druhém argumentu je pak důsledkem symetrie.

3.34. Definice. Symetrická bilineární forma II z předchozího tvrzení se nazývá *druhá fundamentální forma* parametrizace r. Funkce h_{ij} se nazývají *koeficienty druhé fundamentální formy.*

Podobně jako u první fundamentální formy se pužívá se i zápis

$$\mathrm{II} = \sum_{i,j} h_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

který umožňuje počítat

$$\mathrm{II}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j} h_{ij}\, dx^i(\mathbf{u})\, dx^j(\mathbf{v}) = \sum_{i,j} h_{ij} u^i v^j.$$

Geometrický smysl druhé fundamentální formy tkví v tom, že ukazuje, jak rychle se podvarieta odklání od tečného prostoru. Skalární součin $\mathbf{n}\cdot\mathbf{uv}r$ na pravé straně formule (25) totiž měří odchylku vektoru $\mathbf{uv}r$ od normálového vektoru, potažmo od tečného prostoru.

3.35. Tvrzení. *Platí*

$$\mathbf{uv}r = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v})r + \mathrm{II}(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{n}.$$

Důkaz. Formule vyjadřuje vektor $\mathbf{uv}r$ jako součet komponenty náležející tečnému prostoru a komponenty náležející jeho ortogonálnímu doplňku.

Cvičení. Vypočtěte druhou fundamentální formu anuloidu (11)

$$y^1 = (R_2 + R_1 \cos x^1) \cos x^2,$$
$$y^2 = (R_2 + R_1 \cos x^1) \sin x^2,$$
$$y^3 = R_1 \sin x^1$$

Cvičení. Vypočtěte složky druhé fundamentální formy sféry S^{n-1} v souřadnicích (12).

4. Gaussovo zobrazení

Druhá fundamentální forma byla původně zavedena pomocí jistého zobrazení podvariety na sféru. Umístíme-li totiž všechny normálové vektory k ploše v jediném bodě O, leží jejich koncové body na sféře S^{n-1} se středem v O. Zobrazení $U \to S^{n-1}$, které bodu a přiřazuje koncový bod vektoru $\mathbf{n}_a$, se nazývá *Gaussovo zobrazení*. Označíme je také $\mathbf{n}$. Je parametrizací některé části sféry S^{n-1}. Tečný prostor ke sféře v bodě $\mathbf{n}_a$ je přitom totožný s tečným prostorem $T_{r(a)}r(U)$, protože oba jsou ortogonálními doplňky vektoru $\mathbf{n}_a$.

Následující tvrzení ukazuje, že Gaussovo zobrazení umožňuje zavést druhou fundamentální formu jiným způsobem. Poznamenejme, že znaménko je nepodstatné, protože se jej lze zbavit záměnou normovaného normálového vektoru za opačný.

4.1. Tvrzení. *Platí*

$$\mathrm{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{un} \cdot \mathbf{v}r, \tag{26}$$

kde $\mathbf{un}$ *označuje derivaci Gaussova zobrazení* $\mathbf{n} : U \to S^{n-1}$ *podél pole* $\mathbf{u}$.

Důkaz. Protože normálový vektor $\mathbf{n}$ je kolmý k tečnému vektoru $\mathbf{v}r$, platí $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}r = 0$, načež

$$0 = \mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}r) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{uv}r + \mathbf{un} \cdot \mathbf{v}r.$$

Z formule (25) dostáváme tvrzení.