MATEMATICKÉ BESEDY

DELITEĽNOSŤ 2.11.2012

1. p, q - prvočísla. Zistite, aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $p+q$ a p^2+q^2.

Riešenie: $p=q$ $2p$

$p \neq q$ a sú nepárne

$\left.\begin{array}{l} p+q \text{ je párne} \\ p^2+q^2 \text{ tiež} \end{array}\right\} \Rightarrow 2$ je spoločný deliteľ

$p=2$ q nepárne $2+q$ $4+q^2$

$(p+q)^2 = \underbrace{p^2+q^2}+2pq$ $\underbrace{d/2pq}$ $\Rightarrow$ tvrdenie!

2. Určite všetky celé čísla väčšie ako 1, ktorými sa dá krátiť niektorý zo zlomkov tvaru

$\frac{3p-q}{5p+2q}$ kde p a q sú nesúdeliteľné celé čísla.

Riešenie: $\exists d;$ $d / 3p-q$

$d / 5p+2q$

$2(3p-q) + 5p+2q = 11p$ $3(5p+2q) - 5(3p-q) = 11q$

$\Rightarrow \underline{d = 11}$

Musíme ešte ukázať, že naozaj 11 ide krátiť

$11 / 3p - q \qquad 3p - q = 11m \qquad 11p = 22m + 11n$

$11 / 5p + 2q \qquad 5p + 2q = 11n \qquad p = 2m + n$

$q = -11m + 6m + 3n$

Treba nájsť také p a q: Ako? $= -5m + 3n$

$p = 2m + n \qquad n = 2,\ m = 1 \Rightarrow \quad p = 4$

$q = -5m + 3n \qquad q = 1$

$$\frac{3p-q}{5p+2q} = \frac{11}{22}.$$

3. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že

$\frac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.

Riešenie: $\frac{xy^2}{x+y} = p$

$d = nsd(x, y) \quad x = da \quad \Rightarrow$

$y = db$

$\frac{d^3 a b^2}{d(a+b)} = \frac{d^2 ab^2}{a+b} = p$ kde a, b sú už nesúdeliteľné

$\Rightarrow d^2ab^2 = p(a+b)$

a, b nesúdeliteľné $\Rightarrow$ a a b^2 nesúdeliteľné $\Rightarrow$

b^2 a $a+b$ nesúdeliteľné

(prečo? $b^2 = km$ ~~$m / b^2 \Rightarrow m / b$~~

$a+b = lm$ keby b^2 a $a+b$ mali spol. deliteľa $d > 1$,

mali by i spol. prvočísel. deliteľa p,

ktorý by delil b^2 ale i $b \Rightarrow b$ a $a+b$ by boli

súdeliteľné.

Potom teda platí

$b^2 / p \Rightarrow \underline{b=1}$

$\Rightarrow \quad d^2 a = p(a+1)$

$\Rightarrow a/p \Rightarrow a=1$

$\lor\ a=p$

$a=1$: $d^2 = 2p \Rightarrow \underline{p=2}$ a $d=2$

$x = da = 2$

$\underline{y = db = 2}$

$a=p$: $d^2 = p+1$

$p = (d+1)(d-1) \Rightarrow d-1=1 \quad \Rightarrow d=2$

$d+1 = p \quad p=3$

$x = da = dp = 6$

$y = db = 2$

Riešením sú dve dvojice (x,y) a to $(2,2)$ a $(6,2)$.

4. Dokážte, že zlomok $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ sa nedá krátiť.

<u>Riešenie:</u> $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$

nech $\exists d$; $d / 21n+4$
a $d / 14n+3$ $\Rightarrow$ $d/1 \Rightarrow d=1$

a zlomok sa nedá krátiť.

(1. IMO, 1959!)

5. Určite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí

$p + q^2 = q + p^3$

<u>Riešenie:</u> $p^3 - p = q^2 - q$

$\cancel{(p-1)(p^2+p+1) = (q-1)(q+1)}$

$p(p-1)(p+1) = q(q-1)$

$q(q-1) = p(p-1)(p+1)$

$\Rightarrow$ $p < q$ (rozmyslieť prečo)

$\Rightarrow q \mid p(p-1)(p+1) \Rightarrow p \mid p \vee q \mid (p-1) \vee q \mid p+1$

$\Rightarrow q \mid p+1$

$p = 2,\ q = 3$

Skúška $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

6. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r splňujúcich nasledujúce podmienky

$p \mid q+r,\quad q \mid r+2p,\quad r \mid p+3q.$

Riešenie:

Najväčšie je ktoré?

a) p $\quad p \mid q+r,\quad q+r < 2p$

$q + r = 2p \qquad \Rightarrow \underline{q+r = p}$

$q \mid r+2p = 3r + 2q \Rightarrow q \mid 3r \Rightarrow \underline{q = 3}$

$\underline{p = r + 3}$

$r \mid p + 3q = 4q + r = 12 + r \Rightarrow r \mid 12 \Rightarrow \underline{r = 2}$

$p = 5$

b) q $\quad q \mid r + 2p \Rightarrow r + 2p < 3q \Rightarrow \underline{r + 2p = q}$

alebo $\underline{r + 2p = 2q}$

Ak $r + 2p = 2q$ => r musí byť párne.

$r = 2k$ $2k + p = q$

prvočíslo => $k = 1$ to nejde!

$q = r + 2p$ => $p / 2r + 2p$ => $p / 2r$ => $p = 2$

$r / p + 3q = 3r + 7p = 3r + 14$ => $r / 14$ => $r = 7$

$q = r + 2p = \underline{\underline{11}}$

c) $\underline{\underline{\ }}$ $r / p + 3q$ a $p + 3q < 4r$

$3/p$

$p + 3q = 3r$ => $p = 3(r - q)$ => $p = 3$, $r - q = 1$ => $r = 3$ $q = 2$

nemám 3 rôzne prvočísla

$p + 3q = 2r$ => $p / 2(q + r) = p + 5q$ => $p / 5q$ => $p = 5$

$q / 2(r + 2p) = 2r + 20 = 3q + 25$ => $q = 5$ rovnaké!

$p + 3q = r$

$p / p + 4q$ => $p / 4q$ => $p = 2$

$q / r + 2p = 3q + 6$ => $q / 6$ => $q = 3$

$r = p + 3q = 11$

Riešenia $(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$ a $(2, 3, 11)$.