MATEMATICKÉ BESEDY

19.11.2010

KOMBINATORIKA

(1) Určite, koľkými nulami končí zápis čísla 2010!

Riešenie: Pozrime sa, koľkokrát sa v 2010 vyskytuje 5 (2 určite viac krát) čo nám vždy dokopy dá 10 a jednu nulu.

$2010 : 5 = 402$ ale 5 bude i v 25, 125, 625.

Preto

$2010 : 25 = 80$ (zvyšok ...) ten ma nezaujíma

$2010 : 125 = 16$ (zvyšok ...)

$2010 : 625 = 3$ (zvyšok ...)

Pretože $402 + 80 + 16 + 3 = 501$

Číslo 2010! končí 501 nulami.

(2) Odvoďte tzv. Legendreovu formulu: Najvyššia mocnina prvočísla p, ktoré delí $n!$ má stupeň rovný súčtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

$\lfloor x \rfloor$ = celá časť čísla x [najväčšie celé číslo n také, že $n \leq x$]

počet tých čísel od 1 do n, ktoré sú deliteľné p

počet čísel, ktoré sú deliteľné nielen p, ale i p^2 atď.

Do daného súčtu teda každé z čísel od 1 do n prispeje práve toľkokrát, koľkokrát je prvočíslo p zastúpené v jeho rozklade na prvočinitele.

Teraz asi zopakovať rýchlo a stručne kombinačné čísla

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$, Pascalov $\triangle$ a podobne

③ PRÍKLAD: Kedy je kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ nepárne?

$0 \leq k \leq n$ Tu sa dá najprv hľadať vzťah v Pascalovom trojuholníku... pozri vzorák

RIEŠENIE: Podľa Legendreovej formule je $\binom{n}{k}$ nepárne

práve vtedy, keď vo všetkých všeobecne platných nerovnostiach

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{2^i} \right\rfloor \geq 0 \quad (i \in \mathbb{N})$$

nastane rovnosť.

Nech $n = c_0 + c_1 2^1 + c_2 2^2 + c_3 2^3 + \dots$

$k = d_0 + d_1 2^1 + d_2 2^2 + d_3 2^3 + \dots$

Dosadíme a dostaneme

$$\left\lfloor \frac{c_0 + 2c_1 + 2^2 c_2 + \dots c_{i-1} 2^{i-1} + c_i 2^i + c_{i+1} 2^{i+1} + \dots}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d_0 + 2d_1 + 2^2 d_2 + \dots + d_{i-1} 2^{i-1} + d_i 2^i + \dots}{2^i} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{c_0 - d_0 + (c_1 - d_1)2 + \dots + (c_{i-1} - d_{i-1})2^{i-1} + (c_i - d_i)2^i}{2^i} \right\rfloor$$

jasne sa celé čísla musia odčítať... zostanú čísla „menšie" v menovateli a

$$\left\lfloor \frac{c_0 + 2c_1 + 2^2 c_2 + \dots + c_{i-1} 2^{i-1}}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d_0 + 2d_1 + 2^2 d_2 + \dots + 2^{i-1} d_{i-1}}{2^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c_0 - d_0 + \dots + (c_{i-1} - d_{i-1})2^{i-1}}{2^i} \right\rfloor$$

To platí pre každé $i \in N$

Postupne dosadím

$i=1$ a dostanem, že $c_0 \geq d_0$

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{c_0}{2} \right\rfloor}_{0} - \underbrace{\left\lfloor \frac{d_0}{2} \right\rfloor}_{0} = \left\lfloor \frac{c_0 - d_0}{2} \right\rfloor \Uparrow$$

rovnakou úvahou postupne dostanem

$$\left\lfloor \frac{(c_0-d_0)+(c_1-d_1)2}{2^2} \right\rfloor = 0 \quad \Rightarrow c_1 \geq d_1 \quad \text{atď.}$$

čiže $\boxed{c_i \geq d_i}$ $\forall i$

Odvoďte ďalej dôsledky:

a) Všetky kombinačné čísla $\binom{n}{k}$ s daným n a $k \in \{0, \dots, m\}$ sú nepárne práve vtedy keď je číslo $n+1$ mocninou čísla 2.

Dôkaz: $c_i \geq d_i$ určite platí, ak všetky $c_i = 1$

t.j. $n = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \dots 1\cdot 2^m$

potom $n+1 = 2^{m+1}$

treba ukázať

$$1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \dots + 1\cdot 2^m = 2^{m+1} - 1$$

mat. indukciou napríklad (ľahko)

dobré miesto pohrať sa s mat. indukciou (to druháci možno nemali - aspoň stručne im povedať

a s dvojkovou sústavou)

čokoľvek si spomenieš

Ak všetky c_i nie sú rovné 1
niekde nech sú nuly

n nech má povedzme j jednotiek v zápise
v dvojkovej sústave

~~potom $n = \sum$~~ lenže k je ľub. - nájde to!

b, Počet tých kombinačných čísel $\binom{n}{k}$
s ľub. n a k, ktoré sú nepárne
je mocninou čísla 2 pre každé n.
Možné čísla k
~~či~~
keď n má j jednotiek v zápise
=> 2^j možností

PRÍKLAD:

Majme 6n žetónov až na farbu zhodných, po troch z každej z 2n farieb. Dokážte, že počet všetkých takých rozdelení týchto žetónov na dve kôpky po 3n žetónoch, že žiadne tri žetóny rovnakej farby nie sú v rovnakej kôpke, je rovnaký ako počet všetkých takých rozdelení 2n rôznofarebných žetónov na dve kôpky po n žetónoch.

Riešenie:

Žiadne tri žetóny pri prvom rozdelení neleží na 1 kôpke $\Rightarrow$ môžem každé vyhovujúce rozdelenie charakterizovať tým, na ktorej kôpke leží práve jeden z tých 3 žetónov.

Ak v 1 hromádke je l farieb po 1 žetóne,
musí byť $(n-l)$ farieb po 2 žetónach

potom $l + 2(2n-l) = 3n \Rightarrow l = n$

Preto platí tvrdenie

a počet rozdelení $= \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.

na poradí kôpok nezáleží.