Slezská univerzita v Opavě
Matematický ústav v Opavě

Vybrané partie z matematické analýzy I – Diferenciální počet funkcí více proměnných – Cvičení

Karel Hasík

Petra Kordulová

a Zdeněk Kočan

Opava 2013

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hrazeno z prostředků projektu OPVK CZ.1.07/2.2.00/15.0174
Inovace bakalářských studijních oborů se zaměřením na spolupráci s praxí

Obsah

Předmluva

Tato sbírka řešených příkladů doplňuje učební text Vybrané partie z matematické analýzy a spolu s ním pokrývá základní problematiku diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Tento studijní text vznikl jako podpůrný materiál pro studenty Matematického ústavu Slezské univerzity v Opavě. Jeho účelem je napomoci kvalitnějšímu procvičení příslušné látky probírané na přednáškách ať už v rámci výuky ve cvičeních, a nebo při samostatném studiu. Prostudování řešených a propočtení neřešených příkladů by mělo studentům umožnit lépe pochopit a aplikovat získané teoretické poznatky, což je nezbytný krok při studiu každé matematické disciplíny.

Studijní text je určen posluchačům bakalářského studia oborů Matematické metody v ekonomice a Aplikovaná matematika při řešení krizových situací. Nemusí být tedy zcela postačující pro studenty odborného studia matematiky. Jedná se o látku, kterou by měli studenti zvládnout obvykle v průběhu zimního semestru druhého ročníku.

Věříme, že naše snaha pomoci studentům lépe zvládnout látku z diferenciálního počtu funkcí více proměnných bude úspěšná.

Stručný náhled studijní opory

Námi vytvořená sbírka řešených příkladů pokrývá základy teorie, která se probírá v diferenciálním počtu funkcí více proměnných. Pro studium předpokládáme znalost diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné a některé pojmy z lineární algebry a geometrie.

Usilovali jsme o to, aby alespoň do jisté míry vznikl text, který by umožnil studentům řešit úlohy bez dalších studijních pomůcek. Z tohoto důvodu jsou na začátku každé kapitoly uvedeny základní definice a věty, ze kterých při řešení úloh vycházíme. Každá kapitola dále obsahuje nejdříve deset řešených příkladů, které dostatečně ilustrují způsob, jakým lze aplikovat příslušnou teoretickou látku. Prostudování těchto příkladů by mělo studentům umožnit lépe pochopit a aplikovat získané teoretické poznatky. Dále je v každé kapitole uvedeno deset dalších příkladů s výsledky, které slouží k následnému samostatnému studiu.

1 Funkce n proměnných

1.1 Definice a věty

Definice 1.1. Množinu

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n]; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme ***n*-rozměrným reálným prostorem**. **Bodem** v n-rozměrném reálném prostoru nazýváme uspořádanou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Píšeme $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
Dále nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak každé zobrazení $f : M \mapsto \mathbb{R}$ (množiny M do množiny $\mathbb{R}$) nazýváme **reálnou funkcí** n **reálných proměnných**. Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme ji symbolem $\mathcal{D}f$.

Definice 1.2. Je-li f funkce dvou proměnných definovaná na množině M, pak **grafem** funkce f nazýváme množinu bodů tvaru

$$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; [x, y] \in M, z = f(x, y)\}.$$

Definice 1.3. **Úrovňovými křivkami** neboli **vrstevnicemi** funkce f dvou proměnných rozumíme množiny bodů tvaru:

$$v_k = \{[x, y] \in \mathcal{D}f; f(x, y) = k\},$$

kde k je daná reálná konstanta.

Definice 1.4. **Vzdáleností (metrikou)** v n-rozměrném prostoru nazýváme funkci ρ, která libovolným dvěma bodům x, y z $\mathbb{R}^n$ přiřazuje nějakým způsobem jejich vzdálenost $\rho(x, y)$ tak, že jsou splněny následující axiomy:

- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, y) \geq 0$, přičemž $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Definice 1.5. Množinu všech bodů prostoru $\mathbb{R}^n$, jejichž euklidovská vzdálenost od daného bodu x^* je menší než dané číslo $\delta > 0$, nazýváme **$\boldsymbol{\delta}$-okolím** bodu x^* a značíme jej $\mathcal{O}(x^*, \delta)$, popř. jen $\mathcal{O}(x^*)$, pokud δ není podstatné.

Množinu $\mathcal{P}(x^*, \delta) = \mathcal{O}(x^*, \delta) \setminus \{x^*\}$ nazýváme **prstencovým (redukovaným, ryzím) okolím** bodu x^*.

Definice 1.6. Bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **vnitřní bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když existuje $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \Omega$;
- **vnější bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když existuje $\mathcal{O}(x^*)$ takové, že $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$;
- **hraniční bod** množiny $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když pro každé $\mathcal{O}(x^*)$ platí $\mathcal{O}(x^*) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge \mathcal{O}(x^*) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$.

Definice 1.7. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **otevřená**, právě když každý její bod je vnitřním bodem;
- **uzavřená**, právě když obsahuje všechny své hraniční body.

Neprázdná otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **souvislá**, právě když každé dva její body lze spojit lomenou čarou, jejíž všechny body leží v Ω. Množinu, která je neprázdná, otevřená a souvislá, nazýváme **oblastí**. **Uzavřenou oblastí** pak nazýváme množinu, která vznikne jako sjednocení oblasti s množinou všech jejích hraničních bodů.

1.2 Řešené příklady

Příklad 1.8. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x+3y-6}}{y+2}$. Definiční obor znázorněte graficky.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže jmenovatel je různý od nuly a výraz pod odmocninou je nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y - 6 \geq 0, y \neq -2\}.$$

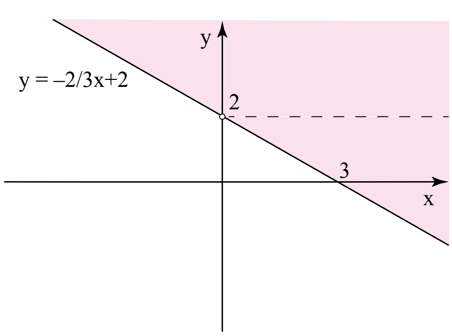
Odtud vidíme, že v definičním oboru nebude ležet přímka $y = -2$. Další vyznačenou přímkou, kterou využijeme ke grafickému znázornění definičního oboru funkce f, je přímka $y = -\frac{2}{3}x + 2$, přičemž nerovnost $2x + 3y - 6 \geq 0$ vymezující definiční obor funkce f je splněna pro všechny body ležící nad přímkou $y = -\frac{2}{3}x + 2$ a na ní. Jestliže z této poloroviny vypustíme body, jejichž y-ová souřadnice je různá od 2, obdržíme definiční obor funkce f (viz obrázek 1).

Příklad 1.9. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln \sin x$. Definiční obor graficky znázorněte.

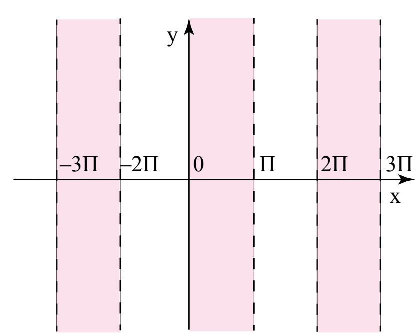
Řešení. Funkce logaritmus je definovaná pro hodnoty větší než 0. Vztah, kterým je funkce f dána, bude mít tedy smysl tehdy, jestliže $\sin x > 0$. Na základě vlastností funkce sinus víme, že tato nerovnost je splněna, jestliže $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo. Hodnoty proměnné y mohou být libovolné. Definičním oborem je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2k\pi < x < (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Graficky lze množinu $\mathcal{D}f$ názornit pomocí přímek $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž body ležící mezi přímkami patří do množiny $\mathcal{D}f$ tehdy, jestliže je pruh zleva vymezen přímkou $x = k\pi$, kde k je sudé a zprava přímkou $x = k\pi$, kde k je liché (viz obrázek 2).



Obrázek 1: Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x+3y-6}}{y+2}$



Obrázek 2: Definiční obor funkce $f(x, y) = \ln \sin x$

Příklad 1.10. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = 2+\sqrt{x^2-y^2}$. Definiční obor graficky znázorněte.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže je výraz pod odmocninou nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

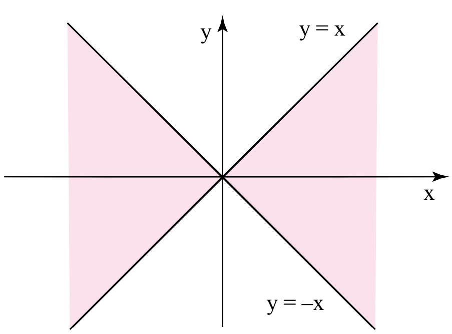
Nerovnost $y^2 \leq x^2$ je ekvivalentní s nerovností $-|x| \leq y \leq |x|$. To znamená, že definičním oborem je množina bodů ležících mezi grafy funkcí $y = |x|$ a $y = -|x|$, jak je znázorněno na obrázku 3.

Příklad 1.11. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{y-x}$. Definiční obor graficky znázorněte.

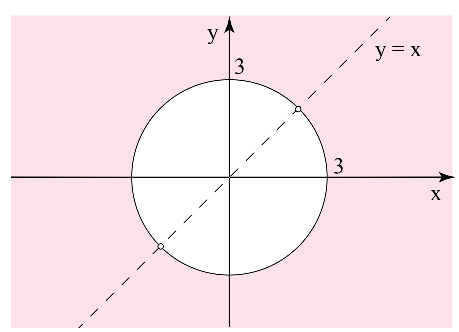
Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže jmenovatel je různý od nuly a výraz pod odmocninou je nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 9 \geq 0, y \neq x\}.$$

V definičním oboru nebude ležet přímka $y = x$. Dále víme, že nerovnost $x^2 + y^2 \geq 9$ je splněna pro všechny body ležící vně kružnice se středem v počátku a poloměrem 3 a na ní. Ve výsledku dostáváme množinu, která je znázorněna na obrázku 4.



Obrázek 3: Definiční obor funkce $f(x,y) = 2 + \sqrt{x^2-y^2}$



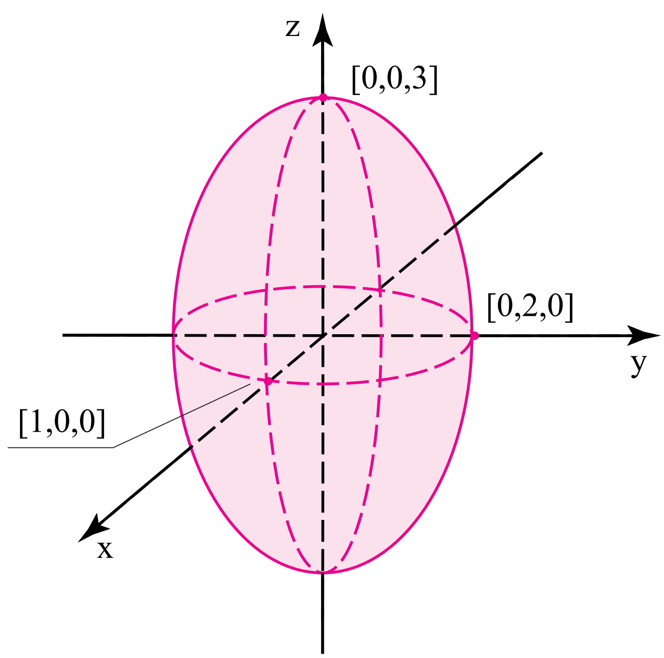
Obrázek 4: Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{y-x}$

Příklad 1.12. Určete definiční obor funkce, která je předepsána vztahem $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2/4 - z^2/9}$. Definiční obor graficky znázorněte.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže je výraz pod odmocninou nezáporný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; 1 - x^2 - y^2/4 - z^2/9 \geq 0\}.$$

Rovnice $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$ je možná čtenáři něčím povědomá. Mohla by mu svým tvarem připomínat rovnici elipsy, kdyby ovšem neobsahovala navíc proměnnou z. Uvědomíme-li si, že přidáním třetího rozměru do rovnice kružnice (což je speciální případ elipsy) získáme rovnici sféry, tj. povrchu koule, není už tak těžké nahlédnout, že rovněž z rovnice elipsy vznikne přidáním proměnné z rovnice popisující povrch tělesa nazývaného elipsoid. Definiční obor námi zkoumané funkce ovšem zahrnuje také všechny body ležící uvnitř elipsoidu a je znázorněn na obrázku 5.



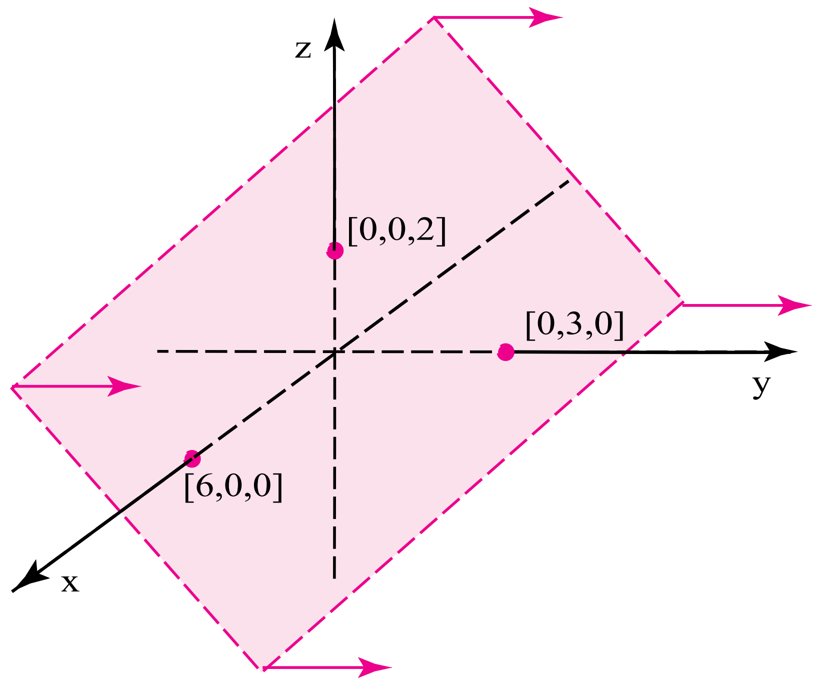
Obrázek 5: Definiční obor funkce $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2/4 - z^2/9}$

Příklad 1.13. Určete definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z - 6)$. Definiční obor graficky znázorněte.

Řešení. Výraz, kterým je daná funkce f, bude mít smysl tehdy, jestliže je výraz uvnitř logaritmické funkce kladný. Definičním oborem funkce f je tedy množina

$$\mathcal{D}f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z > 6\}.$$

Rovnice $x + 2y + 3z = 6$ je rovnice roviny. To znamená, že definičním oborem funkce f je poloprostor nad touto rovinou, který ji ale nezahrnuje. Graficky je situace zachycena na obrázku 6.

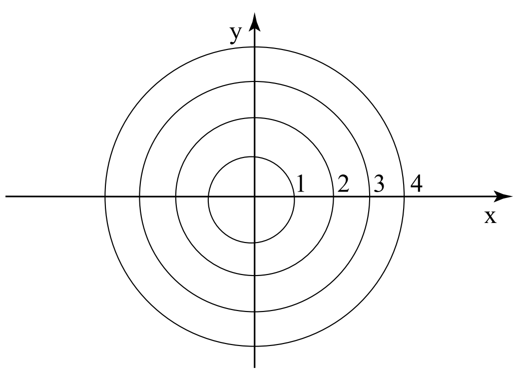


Obrázek 6: Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z - 6)$

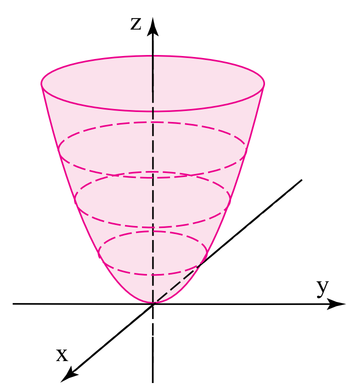
Příklad 1.14. Nakreslete úrovňové křivky funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ pro hodnoty $k = 1, 4, 9, 16$. Na základě obdrženého výsledku se pokuste nakreslit graf funkce.

Řešení. Úrovňové křivky mají tvar $x^2+y^2 = k$, $k = 1, 4, 9, 16$. Jedná se tedy o kružnice s poloměry $r = 1, 2, 3, 4$.

Chceme-li nyní nakreslit graf funkce, tak především konstatujeme, že jejím definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$. Dále ve třírozměrném prostoru znázorníme jednotlivé kružnice v příslušných výškách. Kružnice o poloměru 1 bude tedy ležet ve výšce 1, tj. v rovině $z = 1$, kružnice o poloměru 2 bude ležet v rovině $z = 4$ atd. Plocha, která představuje graf funkce, je vlastně tvořena nespočetně mnoha kružnicemi ležícími nad sebou, jejichž poloměr se postupně zvětšuje, přičemž výška, v níž jednotlivé kružnice leží, je druhou mocninou jejich poloměru. Nazýváme ji paraboloid. Vrstevnice a graf funkce jsou znázorněny na obrázcích 7, 8.



Obrázek 7: Vrstevnice funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$

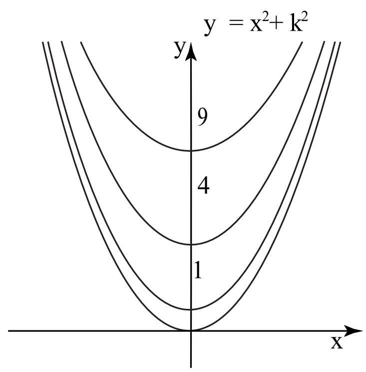


Obrázek 8: Graf funkce dané vztahem $f(x, y) = x^2 + y^2$

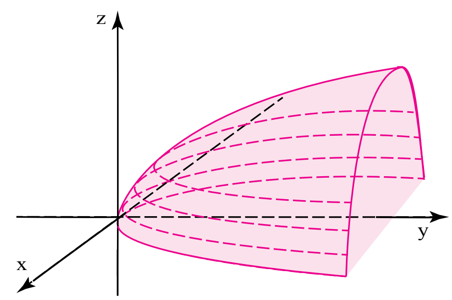
Příklad 1.15. Nakreslete úrovňové křivky funkce $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$ pro hodnoty $k = 0, 1, 2, 3$. Na základě obdržených vrstevnic nakreslete graf funkce f.

Řešení. Nejdříve poznamenejme, že definičním oborem funkce $f = (x, y)$ je množina $\mathcal{D}f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq y^2\}$. Úrovňové křivky mají nyní tvar $\sqrt{y - x^2} = k$, neboli $y = x^2 + k^2, k = 0, 1, 2, 3$. Jedná se tedy o soustavu parabol. Všimeme si, že parabola $y = x^2$ vymezující definiční obor je zároveň vrstevnicí pro $k = 0$.

Jestliže nyní znázorníme v třírozměrném prostoru vrstevnici v příslušné výšce, získáme určitou představu o tom, jak by mohl vypadat graf námi zkoumané funkce. Čtenáři ale nemusí být úplně zřejmé, že se jedná o kvalitativně stejnou plochu jako v předcházejícím příkladu, tj. o paraboloid, přesněji řečeno o jeho polovinu ležící nad rovinou xy. Druhá část paraboloidu by byla dána funkčním vztahem $f(x,y) = -\sqrt{y-x^2}$. Vrstevnice a graf funkce jsou znázorněny na obrázcích 9, 10.



Obrázek 9: Vrstevnice funkce $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$



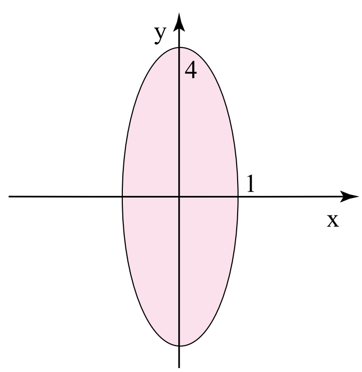
Obrázek 10: Graf funkce dané vztahem $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$

Příklad 1.16. Rozhodněte, zda definiční obor funkce předepsané vztahem $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2-y^2/16)}$ je otevřenou či uzavřenou množinou v $\mathbb{R}^2$. Určete její vnitřní a hraniční body. Ověřte rovněž, zda definiční obor funkce je souvislá množina.

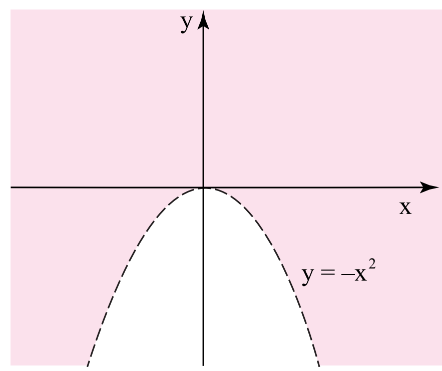
Řešení. Definičním oborem funkce $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2-y^2/16)}$ je množina bodů tvaru

$$\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1-x^2-y^2/16 \geq 0\}.$$

Rovnice $x^2 + y^2/16 = 1$ je rovnicí elipsy se středem v počátku, jejíž hlavní poloosa leží na ose y a má délku 4. Vedlejší poloosa ležící na ose x má délku 1. Nerovnost vymezující definiční obor funkce dále zahrnuje všechny body ležící uvnitř této elipsy – viz obrázek 11. Vybereme-li nyní kterýkoli bod ležící vně či uvnitř elipsy, jsme schopni k němu nalézt bod na elipse, který má od námi zvoleného bodu nejmenší vdálenost. Označíme-li tuto vzdálenost d, pak kružnice o poloměru $r < d$ leží celá vně, resp. uvnitř elipsy. Z výše uvedeného je již zřejmé, že všechny body ležící uvnitř elipsy jsou vnitřními body, zatímco body ležící vně elipsy jsou vnějšími body definičního oboru funkce f. Samotná elipsa je pak množinou hraničních bodů definičního oboru naší funkce. Protože body ležící na elipse patří rovněž do definičního oboru funkce f, je množina $\mathcal{D}f$ uzavřená. Její souvislost je zřejmá a jedná se tedy o uzavřenou oblast.



Obrázek 11: Definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2/16)}$



Obrázek 12: Definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$

Příklad 1.17. Rozhodněte, zda definiční obor funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ je otevřenou či uzavřenou množinou v $\mathbb{R}^2$. Určete její vnitřní a hraniční body. Ověřte rovněž, zda definiční obor funkce je souvislá množina.

Řešení. Definičním oborem funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ je možina bodů tvaru

$$\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; y > -x^2\}.$$

Tato množina je vymezena grafem paraboly $y = -x^2$, přičemž body ležící na této parabole nepatří do definičního oboru funkce $f(x,y)$. Vnitřní body množiny $\mathcal{D}f$ jsou body ležící nad grafem paraboly $y = -x^2$ a vnější body množiny $\mathcal{D}f$ jsou body ležící pod grafem funkce $y = -x^2$.

Jelikož body paraboly $y = -x^2$ jsou hraničními body množiny $\mathcal{D}f$, vidíme, že tato množina je otevřená. Její souvislost je zřejmá. Z toho vyplývá, že definiční obor funkce f je oblastí.

1.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 1.1. Najděte definiční obor funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2-y}$.

Cvičení 1.2. Najděte definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{1-x^2+3y^2}$.

Cvičení 1.3. Najděte definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$.

Cvičení 1.4. Najděte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y,z)=1/xyz$.

Cvičení 1.5. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x}$.

Cvičení 1.6. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y)=\ln(xy-3)$.

Cvičení 1.7. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y)=\arcsin(x+y)$.

Cvičení 1.8. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce dané vztahem $f(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$.

Cvičení 1.9. Graficky znázorněte vstevnice funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Cvičení 1.10. Graficky znázorněte vstevnice funkce $f(x,y)=9x^2+y^2$.

2 Limita a spojitost

2.1 Definice a věty

Definice 2.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina a $P \in \mathbb{R}^2$ je bod.
a) Bod P se nazývá **hromadný bod** množiny M, jestliže každé jeho ryzí okolí $\mathcal{P}(P)$ obsahuje alespoň jeden bod množiny M, tj. $\mathcal{P}(P) \cap M \neq \emptyset$.
b) Bod P se nazývá **izolovaný bod** množiny M, jestliže existuje jeho okolí $\mathcal{O}(P)$ takové, že kromě bodu P neobsahuje žádné jiné body množiny M, tj. $\mathcal{O}(P) \cap M = \{P\}$.

Definice 2.2. Nechť f je funkce dvou proměnných. Řekneme, že funkce f má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ svého definičního oboru $\mathcal{D}f$ **limitu** $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $X = [x, y]$, $X \in \mathcal{P}(P) \cap \mathcal{D}f$, platí $f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
Píšeme

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L, \text{ resp. } \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = L, \text{ resp. } \lim_{X \to P} f(X) = L. \quad (2.1)$$

Věta 2.3. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 2.4. *Nechť $\lim\limits_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0, y_0]$ (tj., existuje konstanta $K \geq 0$ tak, že $|g(x, y)| \leq K$ v tomto ryzím okolí). Pak*

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = 0.$$

Věta 2.5. *Nechť existuje ryzí okolí $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že $h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ pro všechna $[x, y] \in \mathcal{P}(x_0, y_0)$. Nechť existují limity*

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} h(x, y) \quad a \quad \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} g(x, y)$$

a platí, že

$$\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} h(x, y) = \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} g(x, y) = L.$$

Potom existuje také limita $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ *a platí*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Věta 2.6. *Nechť*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L_1, \qquad \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y) = L_2$$

a $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $[x_0, y_0]$ *je hromadný bod množiny* $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$. *Pak pro každé* $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} cf(x,y) = cL_1,$$

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)] = c_1 L_1 + c_2 L_2,$$

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} [f(x,y) g(x,y)] = L_1 L_2.$$

Je-li $L_2 \neq 0$, *pak*

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta 2.7. *Má-li funkce* f *v bodě* $[x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^*)^2$ *vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu* $[x_0, y_0]$, *v němž je funkce* f *ohraničená.*

Definice 2.8. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je **spojitá** v bodě $[x_0, y_0]$ svého definičního oboru $\mathcal{D}f$, platí-li $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Věta 2.9. *Buďte funkce* f, g *spojité v bodě* $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$. *Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce* $f \pm g$, $f \cdot g$. *Je-li navíc* $g(x_0, y_0) \neq 0$, *pak rovněž* $\frac{f}{g}$ *je spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$.

Definice 2.10. Mějme funkci $z = f(u)$ definovanou na definičním oboru $\mathcal{D}f$ a funkci $u = g(x)$ definovanou na $\mathcal{D}g$. Pokud pro každé $x \in \mathcal{D}g$ je $g(x) \in \mathcal{D}f$, pak funkci $z = F(x) = f(g(x))$ (můžeme psát i $z = f \circ g$) nazveme **složenou funkcí**.

Věta 2.11. *Uvažujme složenou funkci* $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$. *Buďte funkce* g, h *spojité v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nechť* $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$. *Je-li* *funkce f spojitá v bodě $[u_0, v_0]$, pak je složená funkce F spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.*

Definice 2.12. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce dvou proměnných, $[x_0, y_0]$ bod. Pak limity

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = L_2$$

se nazývají **postupné dvojnásobné limity**.

Věta 2.13. *Existují-li všechny tři limity L, L_1, L_2, pak jsou si nutně rovny.*

Důsledek 2.14. *Nechť existují L_1, L_2 a $L_1 \neq L_2$. Pak limita L neexistuje.*

2.2 Řešené příklady

Příklad 2.15. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{6x-3y-5}{x^3-y^2}$ v bodě $[-1, 5]$.

Řešení. Do zadané funkce je možno bod $[-1, 5]$ přímo dosadit, protože funkce je v tomto bodě spojitá. Hodnota limity je rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{[x,y]\to[-1,5]} \frac{6x-3y-5}{x^3-y^2} = \frac{6\cdot(-1)-3\cdot 5-5}{(-1)^3-5^2} = \frac{-6-15-5}{-26} = 1.$$

Příklad 2.16. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2-1}{y+4}$ v bodě $[1, -4]$.

Řešení. K vyšetření limity nejdříve použijeme metodu postupných limit. Platí

$$L_1 = \lim_{y\to -4}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{y+4}\right) = \lim_{y\to -4}\frac{0}{y+4} = 0.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to -4}\frac{x^2-1}{y+4}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{0} \Rightarrow \text{ limita } L_2 \text{ neexistuje.}$$

Limita L_1 existuje, limita L_2 neexistuje. Tedy ani limita L neexistuje.
Pro ověření limity můžeme použít i jinou metodu. Použijeme metodu svazku přímek.

$$\begin{aligned} L^{**} &= \lim_{x\to 1, y=k(x-1)-4}\frac{x^2-1}{y+4} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{k(x-1)-4+4} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{k(x-1)} = \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{k} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Limita L^{**} závisí na k, tedy limita neexistuje.

Příklad 2.17. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ v bodě $[2,2]$.

Řešení. Po dosazení souřadnic zadaného bodu získáme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, proto se snažíme příslušný výraz vhodně upravit. Původně zadaná funkce f s definičním oborem $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq y, x \neq -y\}$ se těmito úpravami

$$\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \frac{x^3-y^3}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)}$$

změnila na funkci $F = \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)}$ s $\mathcal{D}F = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq -y, x = y \neq 0\}$. Jelikož funkce F je spojitá v bodě $[2,2]$, můžeme limitu spočíst přímým dosazením tohoto bodu. Tedy

$$\lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

Příklad 2.18. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}$ v bodě $[1,2]$.

Řešení. K vyšetření limity použijeme metodu postupných limit. Platí

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y\to2}\left(\lim_{x\to1} \frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}\right) = \lim_{y\to2} \frac{y^3-8}{y-2} = \lim_{y\to2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{y-2} = \\ &= \lim_{y\to2}(y^2+2y+4) = (2)^2+2\cdot2+4 = 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to2} \frac{y^3-x^3-7}{x+y-3}\right) = \lim_{x\to1} \frac{1-x^3}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \\ &= -\lim_{x\to1}(x^2+x+1) = -(1+1+1) = -3 \end{aligned}$$

Limity L_1, L_2 existují, ale jsou různé. Z toho plyne, že daná limita neexistuje.

Příklad 2.19. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Řešení. Po dosazení souřadnic bodu $[0,0]$ získáme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Limitu najdeme tak, že zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{x^2+y^2+4}+2$ a dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2+4-4}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Je nutné si uvědomit, že úpravami zadaného výrazu se také měnil definiční obor.
Limitu můžeme vyšetřovat také pomocí metody postupných limit. Platí

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+4}-2}{y^2} \overset{L'H}{=} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y(y^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2y} == \lim_{y\to 0}\frac{(y^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \overset{L'H}{=} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Obě limity L_1, L_2 existují a jsou si rovny. O existenci limity nelze na tomto základě nic soudit. Použijeme metodu transformace do polárních souřadnic. Platí

$$\begin{aligned} L^* &= \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+}\frac{\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2+4}-2}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2} = \\ &= \lim_{r\to 0^+}\frac{\sqrt{r^2+4}-2}{r^2} \overset{L'H}{=} \lim_{r\to 0^+}\frac{r(r^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2r} = \lim_{r\to 0^+}\frac{(r^2+4)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zadaná limita L existuje a je rovna $\frac{1}{4}$.

Příklad 2.20. Určete body nespojitosti funkce $F(x,y) = \frac{y^2+x}{\sqrt{x^2-y-6}}$.

Řešení. Funkce $g(x,y) = y^2+x$, $h(x,y) = x^2-y-6$ jsou polynomy dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce $f = \frac{g}{\sqrt{h}}$ je spojitá v bodech, ve kterých je definována, tj. kde $x^2-y-6>0$. Tedy složená funkce $F(x,y) = \frac{y^2+x}{\sqrt{x^2-y-6}}$ není spojitá pro $y \geq x^2-6$. Jinými slovy body nespojitosti tvoří vnitřek a okraj paraboly s vrcholem o souřadnicích $V = [0,-6]$.

Příklad 2.21. Určete body nespojitosti funkce $F(x,y) = \frac{5}{3}x^3 \sin(x^2+y^2-4)$.

Řešení. Položme $g(x,y) = \frac{5}{3}x^3$, $h(x,y) = x^2+y^2-4$. Jedná se o polynomy a ty jsou spojité v celé rovině. Také funkce $\sin h$ je spojitá v celé rovině. Složená funkce $F(x,y) = \frac{5}{3}x^3 \sin(x^2+y^2-4)$ je spojitá v každém bodě $[x,y] \in \mathbb{R}^2$.

Příklad 2.22. Nechť je dána funkce $F(x,y) = \frac{3y-2x}{\ln\sqrt{6y^2-11}}$. Za jakých podmínek je tato funkce nespojitá?

Řešení. Položme $g(x,y) = 3y-2x$, $h(x,y) = 6y^2-11$. Jedná se o polynomy dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce $\ln\sqrt{h}$ je spojitá v bodech, ve kterých je definována, tj. kde $6y^2-11 > 0$. Funkce $\frac{u}{\ln\sqrt{v}}$ je spojitá v bodech, pro které platí $6y^2-11 > 0 \wedge 6y^2-11 \neq 1$. Výsledkem tedy je, že složená funkce $F(x,y) = \frac{3y-2x}{\ln\sqrt{6y^2-11}}$ je nespojitá pro $y^2 \leq \frac{11}{6}$ a $y = \pm\sqrt{2}$.

Příklad 2.23. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+3y-2x-6}{y^2x-4x+2y^2-8} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [-1,2], \\ 1 & \text{pro} \quad [x,y] = [-1,2] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[-1,2]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[-1,2]$, musela by mít v tomto bodě limitu rovnu jedné. Než začneme počítat limitu, vhodně si upravíme zadanou funkci f,tj.

$$\begin{aligned} \frac{xy+3y-2x-6}{y^2x-4x+2y^2-8} &= \frac{y(x+3)-2(x+3)}{y^2(x+2)-4(x+2)} = \frac{(y-2)(x+3)}{(y^2-4)(x+2)} = \\ &= \frac{x+3}{(y+2)(x+2)}. \end{aligned}$$

Funkce f má definiční obor $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq -2, y \neq -2, y \neq 2\}$ a funkce $F(x,y) = \frac{x+3}{(y+2)(x+2)}$ má $\mathcal{D}F = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \neq -2, y \neq -2\}$. Bod $[-1,2] \in \mathcal{D}F$ a limitu můžeme spočíst přímým dosazením tohoto bodu

$$\lim_{[x,y]\to[-1,2]} \frac{xy+3y-2x-6}{y^2x-4x+2y^2-8} = \lim_{[x,y]\to[-1,2]} \frac{x+3}{(y+2)(x+2)} = \frac{1}{2}.$$

Limita funkce f v bodě $[-1,2]$ je rovna $\frac{1}{2}$. Aby zadaná funkce byla spojitá, musí platit, že $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,2]} f(x,y) = f(-1,2)$, což v našem případě není splněno, jelikož $\frac{1}{2} \neq 1$. Z toho tedy plyne, že funkce f není v bodě $[-1, 2]$ spojitá.

Příklad 2.24. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení. Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0, 0]$, musela by mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Při vyšetřování limity metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda transformace do polárních souřadnic selhává, dávají výsledek nula. Z toho nemůžeme o existenci limity či spojitosti nic usuzovat. Dále k vyšetření limity použijeme metodu svazku parabol, tj.

$$L^{**} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx^2}} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 (kx^2)^2}{x^8 + (kx^2)^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^8 k^2}{x^8 (1 + k^4)} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

Protože limita L^{**} závisí na parametru k, zadaná limita neexistuje. Jelikož limita není rovna nule, zkoumaná funkce f v bodě $[0, 0]$ nemůže být spojitá.

Příklad 2.25. Nalezněte číslo c, pro které je funkce f spojitá v bodě $[-1, 0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [-1,0], \\ c & \text{pro} \quad [x,y] = [-1,0] \end{cases}$$

Řešení. Než začneme počítat limitu, upravíme si zadanou funkci f, tj.

$$\frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1} = \frac{x(y + 2) + y + 2}{y^2(x + 1) + x + 1} = \frac{(x + 1)(y + 2)}{(y^2 + 1)(x + 1)} = \frac{y + 2}{y^2 + 1}.$$

Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 1\}$. Na rozdíl od toho definiční obor funkce $F = \frac{y+2}{y^2+1}$ je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$ a tedy funkce F je v bodě $[-1, 0]$ spojitá. Nyní můžeme spočíst limitu

$$\lim_{[x,y] \to [-1,0]} \frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1} = \lim_{[x,y] \to [-1,0]} \frac{y + 2}{y^2 + 1} = \frac{0 + 2}{0^2 + 1} = 2.$$

Číslo $c = 2$.

2.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 2.1. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \tan y + 2\cot(x+y)$ v bodě $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Cvičení 2.2. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+2xy+y^2}{y+x}$ v bodě $[-1,1]$.

Cvičení 2.3. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{-y^2}{x}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.4. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{-x^2}{y}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.5. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{2x-8}{y-2}$ v bodě $[4,2]$.

Cvičení 2.6. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x}$ v bodě $[0,2]$.

Cvičení 2.7. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^4+y^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.8. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.9. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.10. Vyšetřete, zda je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0,0]$.

Cvičení 2.11. Nalezněte číslo c, pro které je funkce f spojitá v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [0,0], \\ c & \text{pro} \quad [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

Cvičení 2.12. Nalezněte číslo c, pro které je funkce f spojitá v bodě $[2,-3]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-2-2y+x}{x+y+1} & \text{pro} \quad [x,y] \neq [2,-3], \\ c & \text{pro} \quad [x,y] = [2,-3] \end{cases}$$

3 Parciální derivace

3.1 Definice a věty

Definice 3.1. Nechť je funkce $f(x, y)$ definovaná v bodě $[x_0, y_0]$, který je vnitřním bodem množiny $\mathcal{D}f$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji

$$f_x(x_0, y_0), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Analogicky pak limitu tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

nazýváme parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji

$$f_y(x_0, y_0), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Definice 3.2. Nechť je funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ definovaná v bodě $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$, který je vnitřním bodem množiny $\mathcal{D}f$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^* + h, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{h},$$

nazýváme ji **parciální derivací** funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ podle proměnné x_1 v bodě $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ a značíme ji

$$f_{x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

Věta 3.3. *Nechť mají funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ a $g(x_1, x_2, \dots x_n)$ parciální derivace v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ podle proměnné x_i, $i = 1 \leq i \leq n$. Pak mají v tomto bodě parciální derivace také funkce $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a f/g, přičemž platí:*

1. $(c \cdot f)_{x_i}(x^*) = c \cdot f_{x_i}(x^*)$,

2. $(f+g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) + g_{x_i}(x^*)$,

3. $(f-g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) - g_{x_i}(x^*)$,

4. $(f \cdot g)_{x_i}(x^*) = f_{x_i}(x^*) \cdot g(x^*) + f(x^*) \cdot g_{x_i}(x^*)$,

5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{x_i}(x^*) = \dfrac{f_{x_i}(x^*) \cdot g(x^*) + f(x^*) \cdot g_{x_i}(x^*)}{g^2(x^*)}, \quad g(x^*) \neq 0.$

Definice 3.4. Nechť $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ je funkce n proměnných. Má-li funkce $f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_j, nazýváme ji **parciální derivací druhého řádu** funkce $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ v bodě x^* podle proměnných x_i a x_j a značíme ji

$$f_{x_i x_j}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*), \qquad \text{popř.} \qquad \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

Věta 3.5. *(Schwarzova) Jestliže jsou smíšené parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y)$ spojité v bodě $[x^*, y^*]$, pak platí*

$$f_{xy}(x^*, y^*) = f_{yx}(x^*, y^*).$$

Věta 3.6. *Jestliže jsou všechny smíšené parciální derivace řádu k funkce $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ spojité v bodě $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$, pak jejich hodnota v tomto bodě nezávisí na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát jsme funkci f podle jednotlivých proměnných derivovali.*

3.2 Řešené příklady

Příklad 3.7. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce předepsané vztahem $f(x,y) = x^3 + 4x^2y + 3xy^2 + y^3$ v bodě $B = [1, 2]$.

Řešení. Můžeme postupovat dvěma způsoby. První spočívá v tom, že za proměnnou x, resp. y ihned dosadíme příslušné hodnoty a pak počítáme už jen s funkcemi jedné proměnné podle známých pravidel pro derivování. Dostáváme tedy vztah

$$f(1,y)=1+4y+3y^2+y^3,$$

který dál derivujeme podle proměnné y, což nám dává

$$f_y(1,y)=4+6y+3y^2,$$

odkud nám po dosazení vyjde hodnota $f_y(1,2)=28$.

Obdobně vypočteme

$$f(x,2)=x^3+8x^2+12x+8$$

a po derivaci podle x obdržíme

$$f_x(x,2)=3x^2+16x+12,$$

a tedy $f_x(1,2)=31$.

Při výpočtu samozřejmě nemusíme ihned za proměnné x,y dosadit, chápeme-li je jako konstanty. To znamená, že při derivování podle x zacházíme s proměnnou y jako s konstantou a naopak. Jestliže postupujeme takto, dostaneme

$$f_x(x,y)=3x^2+8xy+3y^2$$
$$f_y(x,y)=4x^2+6xy+3y^2,$$

odkud nám opět vyjde $f_x(1,2)=31$, $f_y(1,2)=28$.

Je zřejmé, že druhý postup má výhodu ve své obecnosti, a dojde-li ke změně bodu, v němž má být derivace vypočtena, nemusíme výpočet opakovat celý, ale stačí jen dosadit nové hodnoty do výrazů udávajících f_x a f_y. Výhodou prvního postupu je skutečnost, že někdy může vést ke zjednodušení výpočtu a snížit tak pravděpodobnost, že se při výpočtu dopustíme chyby.

Příklad 3.8. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y)=\ln(xy)+\mathrm{e}^{x/y}$.

Řešení. Postup bude opět založen na tom, že při výpočtu jednotlivých parciálních derivací budeme druhou proměnnou považovat za konstantu. Nyní je ovšem zapotřebí vzít navíc v úvahu skutečnost, že pracujeme vlastně se složenými funkcemi, a je tedy nutné derivovat součin a podíl uvnitř logaritmické, resp. exponenciální funkce. Máme tedy

$$f_x(x,y) = \left(\frac{1}{x.y}\right).y + \exp\left(\frac{x}{y}\right).\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\exp\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$f_y(x,y) = \left(\frac{1}{x.y}\right).x + \exp\left(\frac{x}{y}\right).\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\exp\left(\frac{x}{y}\right).$$

Příklad 3.9. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$.

Řešení. Chápeme-li y jako konstantu, dostáváme

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}.$$

Považujeme-li v dalším za konstantu proměnnou x, vyjde nám

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}.$$

Příklad 3.10. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}$.

Řešení. Chápeme-li y jako konstantu, můžeme použít pravidlo pro součin funkcí, což nám dává

$$f_x(x,y) = 2x \cdot \mathrm{e}^{xy} + (x^2+y^2)y\mathrm{e}^{xy} = (2x + x^2y + y^3)\mathrm{e}^{xy}.$$

V dalším můžeme využít symetrie zadané funkce vzhledem k proměnným x a y k získání výsledku pro parciální derivaci podle y. Stačí ve výrazu $f_x(x,y)$ zaměnit x za y. Ihned tedy dostáváme

$$f_y(x,y) = (2y + xy^2 + x^3)\mathrm{e}^{xy}.$$

Doporučujeme nicméně čtenáři, aby výpočet v rámci cvičení provedl přímo.

Příklad 3.11. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y) = \mathrm{tg}(x^2-y^2)$.

Řešení. Chápeme-li y jako konstantu, můžeme použít opět pravidlo pro derivování složené funkce, což nám dává

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x^2-y^2)} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2-y^2)}$$

a

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x^2-y^2)} \cdot (-2y) = \frac{-2y}{\cos^2(x^2-y^2)}.$$

Povšimněte si, že i v tomto příkladě jsme mohli využít struktury zadané funkce vzhledem k proměnným x a y k získání výsledku pro parciální derivaci podle y. Stačilo ve výrazu $f_x(x,y)$ zaměnit x za $-y$.

Příklad 3.12. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x,y,z) = x^2z + \mathrm{e}^{yz^2} + \sqrt{x^3y^2z}$.

Řešení. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x považujeme proměnné y a z za konstanty. Odtud

$$f_x(x,y,z) = 2xz + 0 + \frac{1}{2\sqrt{x^3y^2z}} \cdot 3x^2y^2z = 2xz + \frac{3x^2y^2z}{2\sqrt{x^3y^2z}}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle proměnné y považujeme proměnné x a z za konstanty. Odtud

$$f_y(x,y,z) = 0 + z^2\mathrm{e}^{yz^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3y^2z}} \cdot 2x^3yz = z^2\mathrm{e}^{yz^2} + \frac{x^3yz}{\sqrt{x^3y^2z}}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle proměnné z považujeme proměnné x a y za konstanty. Odtud

$$f_z(x,y,z) = x^2 + 2yz\mathrm{e}^{yz^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3y^2z}} \cdot x^3y^2 = x^2 + 2yz\mathrm{e}^{yz^2} + \frac{x^3y^2}{2\sqrt{x^3y^2z}}.$$

Příklad 3.13. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(u,v,w) = u^v + v^w + w^u$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že při výpočtu jednotlivých parciálních derivací pracujeme vždy se součtem mocninné, exponenciální a konstantní funkce. Např. při výpočtu f_u je u^v mocninná funkce, w^u exponenciální funkce a v^w je konstanta. Aplikujeme-li nám známé vzorce pro derivování těchto funkcí, dostaneme

$$f_u(u,v,w) = vu^{v-1} + 0 + w^u \ln w = vu^{v-1} + w^u \ln w.$$

Při výpočtu zbylých derivací f_v, f_w můžeme opět využít symetrického výskytu proměnných, a proto uvádíme jen výsledky. Opět doporučujeme čtenáři, aby výpočtem ověřil jejich správnost.

$$f_v(u,v,w) = u^v \ln u + w.v^{w-1}$$

$$f_w(u,v,w) = v^w \ln v + u.w^{u-1}.$$

Příklad 3.14. Je dána funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} \sin x \cos y$. Vypočtěte f_{xx} a f_{yy}.

Řešení. Jen připomínáme, že derivujeme-li funkci více proměnných podle jednotlivých proměnných, obdržíme jako výsledek opět funkci více proměnných. Opětovným derivováním těchto funkcí obdržíme parciální derivace druhého, příp. vyššího řádu. Máme tedy

$$f_x(x,y) = \cos y(y\mathrm{e}^{xy} \sin x + \mathrm{e}^{xy} \cos x),$$

$$f_y(x,y) = \sin x(x\mathrm{e}^{xy} \cos y - \mathrm{e}^{xy} \sin y).$$

Dále pak

$$f_{xx} = \cos y(y^2\mathrm{e}^{xy} \sin x + 2y\mathrm{e}^{xy} \cos x - \mathrm{e}^{xy} \sin x),$$

$$f_{yy} = \sin x(x^2\mathrm{e}^{xy}. \cos y - 2x\mathrm{e}^{xy} \sin y - \mathrm{e}^{xy} \cos y).$$

Příklad 3.15. Vypočtěte všechny smíšené parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy^2} xz^3$.

Řešení. Jedná se o součin spojitě diferencovatelných funkcí. Při jeho derivování vznikne vždy jen spojitá funkce. Z tohoto důvodu nemusíme počítat všechny smíšené parciální derivace druhého řádu, jestliže se odvoláme na Schwarzovu větu, která nám rovnost některých z nich zaručuje. Dostáváme tedy

$$f_x(x,y,z) = y^2\mathrm{e}^{xy^2} \cdot xz^3 + \mathrm{e}^{xy^2} z^3 = z^3\mathrm{e}^{xy^2}(xy^2+1).$$

Dále máme

$$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 3z^2\mathrm{e}^{xy^2}(xy^2+1)$$

a

$$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 2xyz^3\mathrm{e}^{xy^2}(xy^2+1) + 2xyz^3\mathrm{e}^{xy^2} =$$

$$= 2xyz^3 \mathrm{e}^{xy^2}(xy^2 + 2).$$

Zbývá vypočítat smíšené parciální derivace, kdy derivujeme podle proměnných y a z. Máme tedy např.

$$f_z(x, y, z) = 3\mathrm{e}^{xy^2} xz^2$$

a

$$f_{zy}(x, y, z) = f_{yz}(x, y, z) = 6x^2yz^2\mathrm{e}^{xy^2}.$$

Příklad 3.16. Je dána rovnice

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = nw.$$

Ověřte, že funkce $w = (ax + by + cz)^n$, kde a, b, c jsou konstanty, je řešením této rovnice.

Řešení. Abychom ověřili platnost rovnice pro danou funkci, vypočteme nejdříve její parciální derivace podle jednotlivých proměnných a pak do rovnice obdržené výsledky dosadíme. Potřebné vztahy pro dosazení jsou

$$\frac{\partial w}{\partial x} = na(ax + by + cz)^{n-1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = nb(ax + by + cz)^{n-1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = nc(ax + by + cz)^{n-1}.$$

Po dosazení do levé strany rovnice dostáváme výraz

$$xna(ax + by + cz)^{n-1} + ynb(ax + by + cz)^{n-1} + znc(ax + by + cz)^{n-1} =$$

$$= n(ax + by + cz)^{n-1}(ax + by + cz) = n(ax + by + cz)^n = nw.$$

Vidíme tedy, že funkce w dané rovnici vyhovuje.

3.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 3.1. Vypočtěte hodnotu parciálních derivací prvního řádu funkce $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-y} + 3y$ v bodě $[1, 0]$.

Cvičení 3.2. Vypočtěte hodnotu parciálních derivací prvního řádu funkce $f(x, y) = \sin(x + y)$ v bodě $[\pi/6, \pi/3]$.

Cvičení 3.3. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{tg}(x - y)$.

Cvičení 3.4. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y) = \frac{4\sqrt{x}}{3y^2+1}$.

Cvičení 3.5. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y) = \frac{3x-y}{x+2y}$.

Cvičení 3.6. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(x, y, z) = 2\sqrt{x}y - y\mathrm{e}^{y/z}$.

Cvičení 3.7. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dané vztahem $f(w, x, y, z) = w^2u^2 - wx^3 + xu\cos(wz^2) + (2y^2z)^4$.

Cvičení 3.8. Výpočtem ověřte, že pro funkci $f(x, y) = \mathrm{e}^{-3x} \cos y$ platí rovnost $f_{xy} = f_{yx}$.

Cvičení 3.9. Výpočtem ověřte, že pro funkci $f(x, y) = \ln(x+y)$ platí rovnost $f_{xy} = f_{yx}$.

Cvičení 3.10. Ověřte, že funkce $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je řešením Laplaceovy rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

4 Diferenciál funkce, Taylorův polynom

4.1 Definice a věty

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $P = [x_0, y_0]$ je v tomto bodě **diferencovatelná**, jestliže existují reálná čísla $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ taková, že platí

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (\mathcal{A}h + \mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{4.1}$$

Lineární funkce $\mathcal{A}h + \mathcal{B}k$ proměnných h, k se nazývá **totální** (neboli úplný) **diferenciál** funkce f v bodě $P = [x_0, y_0]$. Označujeme $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k)$, příp. $\mathrm{d}f(P)(h, k)$ nebo $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Věta 4.2. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí $\mathcal{A} = f_x(P)$, $\mathcal{B} = f_y(P)$, tj.*

$$\mathrm{d}f(P)(h, k) = f_x(P)h + f_y(P)k. \tag{4.2}$$

Věta 4.3. *Má-li funkce f v bodě $P = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak je v tomto bodě diferencovatelná.*

Věta 4.4. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.*

Poznámka 4.5. Diferenciál lze využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k). \tag{4.3}$$

Věta 4.6. *Tečná rovina plochy $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$. Rovnice tečné roviny v bodě T je dána vztahem*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{4.4}$$

Věta 4.7. *Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě T je určena parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} n : x &= x_0 - f_x(x_0, y_0)t, \\ y &= y_0 - f_y(x_0, y_0)t, \\ z &= z_0 + t, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Definice 4.8. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \mathbb{R}^n$ je v tomto bodě diferencovatelná, jestliže existuje $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ dostatečně malé platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*) - \langle \mathcal{A}, h \rangle}{\|h\|} = 0, \tag{4.6}$$

kde $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$ a $\langle \mathcal{A}, h \rangle = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i h_i$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Lineární funkci $\mathrm{d}f(x^*)(h) = \langle \mathcal{A}, h \rangle$ nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě x^*.

Definice 4.9. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace až do řádu m, které jsou v tomto bodě spojité. **Totálním diferenciálem m-tého řádu** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ rozumíme homogenní funkci m-tého stupně

$$\mathrm{d}^m f(x_0, y_0)(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x_0, y_0) h^j k^{m-j}. \tag{4.7}$$

Poznámka 4.10. Pro případ n proměnných je diferenciál m-tého řádu homogenní funkce n proměnných $h = (h_1, \dots, h_n)$

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = \sum_{j_1 + \ldots + j_n = m} \frac{m!}{j_1! \ldots j_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x^*) h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}.$$

Tento vztah lze formálně zapsat následovně

$$\mathrm{d}^m f(x^*)(h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^m f(x^*), \tag{4.8}$$

přičemž po normálním umocnění nahradíme součiny $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{j_i} f(x^*)$ členy $\frac{\partial^{j_i} f}{\partial x_i^{j_i}}(x^*)$, $i = 1, \dots, n$.

Věta 4.11. *Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ mají spojité parciální derivace na jednoduše souvislé oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak výraz*

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce na množině M právě tehdy, když platí

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \textit{pro každé } [x,y] \in M.$$

Věta 4.12. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v nějakém okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*]$ spojité parciální derivace řádu $m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Pak pro libovolné dostatečně malé $h = x - x^*$ existuje $\theta \in (0,1)$ takové, že platí*

$$\begin{aligned} f(x^* + h) &= f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \\ &+ \ldots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h) + R_m(x), \end{aligned} \tag{4.9}$$

kde

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta h)(h). \tag{4.10}$$

Poznámka 4.13. Výraz (4.9) nazýváme Taylorův vzorec řádu m nebo také Taylorova formule. Hodnota $R_m(x)$ ze vztahu (4.10) se nazývá Taylorův zbytek. Polynom

$$T_m(x) = f(x^*) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(x^*)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x^*)(h) + \ldots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(h), \tag{4.11}$$

se nazývá Taylorův polynom m-tého řádu funkce f v bodě x^*. V případě, že $x^* = [0, \ldots, 0]$, mluvíme o vzorci (4.9) jako o Maclaurinově vzorci.

4.2 Řešené příklady

Příklad 4.14. Rozhodněte, zda je funkce $f(x,y) = x^2 + y\cos x$ diferencovatelná v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Řešení. Definičním oborem funkce f je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$. Využijeme větu 4.3, která říká, že spojité parciální derivace funkce f v bodě P dávají diferencovatelnost funkce f v bodě P. V našem případě $P = [\frac{\pi}{2}, 1]$. Spočteme parciální derivace funkce f v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$, tj.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - y\sin x, \qquad & f_y(x,y) &= \cos x, \\ f_x(\tfrac{\pi}{2}, 1) &= \pi - 1, & f_y(\tfrac{\pi}{2}, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru, tedy i v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$. Funkce f je diferencovatelná v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Poznámka 4.15. Tento příklad lze také řešit pomocí definice 4.1, tj. ověříme, zda limita $\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (\mathcal{A}h + \mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, kde $f(x,y) = x^2 + y\cos x$ a $[x_0, y_0] = [\frac{\pi}{2}, 1]$.

Příklad 4.16. Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99}$.

Řešení. Označme $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$. Zvolme bod $[x_0, y_0] = [3, 1]$ a spočteme diference $h = x - x_0 = 0{,}01$, $k = y - y_0 = -0{,}01$. Pro výpočet použijeme vztah $f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k)$. V bodě $[3,1]$ a s diferencemi $h = 0{,}01$, $k = -0{,}01$ máme

$$f(3{,}01, 0{,}99) \doteq f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1)(0{,}01, -0{,}01).$$

Ze vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}h + \frac{y}{2\sqrt{xy}}k,$$

$$\mathrm{d}f(3,1)(0{,}01, -0{,}01) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 0{,}01 + \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot (-0{,}01) = -\frac{1}{100\sqrt{3}}.$$

Pak dosazením do výše uvedeného vztahu dostáváme

$$\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99} = f(3{,}01, 0{,}99) \doteq f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1) = \sqrt{3} - \frac{1}{100\sqrt{3}} = \frac{299}{100\sqrt{3}}.$$

Příklad 4.17. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = xy\ln(x+y)$ v obecném bodě.

Řešení. Definičním oborem dané funkce je $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > -y\}$. Spočteme první parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)y\ln(x+y) + xy}{x+y},$$

$$f_y(x,y) = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)x\ln(x+y)+xy}{x+y}.$$

Jelikož parciální derivace jsou spojité v každém bodě definičního oboru $\mathcal{D}f$, totální diferenciál existuje. Dosazením do vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \frac{(x+y)y\ln(x+y)+xy}{x+y}h + \frac{(x+y)x\ln(x+y)+xy}{x+y}k.$$

Příklad 4.18. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = x^{y/z}$ v bodě $[2,1,1]$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x > 0, z \neq 0\}$. Funkce f má spojité parciální derivace prvního řádu v libovolném bodě svého definičního oboru, tudíž diferenciál existuje. Spočteme první parciální derivace a dosadíme bod $[2,1,1]$

$$f_x(x,y,z) = \frac{yx^{(y/z)-1}}{z}, \quad f_y(x,y,z) = \frac{x^{y/z}\ln x}{z}, \quad f_z(x,y,z) = -\frac{x^{y/z}y\ln x}{z^2},$$

$$f_x(2,1,1) = 1, \qquad f_y(2,1,1) = 2\ln 2, \qquad f_z(2,1,1) = -2\ln 2.$$

Totální diferenciál v bodě $[2,1,1]$ podle vzorce (4.8) je

$$\mathrm{d}f(2,1,1)(h_1,h_2,h_3) = h_1 + 2\ln 2\, h_2 - 2\ln 2\, h_3.$$

Příklad 4.19. Určete tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x,y) = \ln\frac{1-x+y}{1+x+y}$ v bodě $[-1,1]$.

Řešení. Nejdříve dopočteme třetí souřadnici bodu T:

$$z_0 = f(x_0,y_0) = f(-1,1) = \ln 3.$$

Funkce je definována pro $\frac{1-x+y}{1+x+y} > 0$. Spočteme parciální derivace prvního řádu

$$f_x(x,y) = \frac{-2(y+1)}{(y+1)^2-x^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2x}{(y+1)^2-x^2}$$

a určíme jejich hodnoty v bodě $[-1,1]$

$$f_x(-1,1) = -\frac{4}{3}, \quad f_y(-1,1) = -\frac{2}{3}.$$

Parciální derivace jsou v bodě $[-1, 1]$ spojité, tudíž funkce f je v tomto bodě diferencovatelná a tedy existuje tečná rovina. Dosazením do rovnice pro tečnou rovinu (4.4) máme

$$z - \ln 3 = -\frac{4}{3}(x+1) - \frac{2}{3}(y-1) \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + z + \frac{2}{3} - \ln 3 = 0.$$

Rovnici normály získáme dosazením do vztahu (4.5)

$$n : x = -1 + \frac{4}{3}t, \quad y = 1 + \frac{2}{3}t, \quad z = \ln 3 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.20. Na grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ najděte bod, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\rho : 12x + 3y - z = 0$.

Řešení. Hledáme bod $T = [x_0, y_0, z_0]$. Z analytické geometrie víme, že dvě rovnoběžné roviny mají kolineární normálový vektor. Určíme si tedy normálový vektor roviny ρ, značíme $\mathbf{n}_\rho$, tečné roviny t, značíme $\mathbf{n}_t$, a jelikož jsou tyto vektory rovnoběžné, platí $\mathbf{n}_t = k\mathbf{n}_\rho$, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Normálový vektor roviny ρ určíme ze zadání, $\mathbf{n}_\rho = (-12, -3, 1)$. Normálový vektor tečné roviny t určíme pomocí parciálních derivací funkce f,

$$\mathbf{n}_t = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}, 1 \right),$$

a ze vztahu $\mathbf{n}_t = k\mathbf{n}_\rho$

$$\mathbf{n}_t = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) = k(-12, -3, 1) = (-12k, -3k, k).$$

Z poslední rovnosti plyne, že $k = 1$. Porovnáním prvních dvou složek normálových vektorů dostáváme

$$\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} = -12, \quad \frac{y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} = -3.$$

Aby tyto rovnosti byly splněny, musí být hodnoty x_0, y_0 záporné. Počítáme a dostaneme $T = [-\frac{12}{\sqrt{154}}, -\frac{3}{\sqrt{154}}, \frac{1}{\sqrt{154}}]$.

Příklad 4.21. Zjistěte, zda daný výraz $(y - \frac{\sin^2 y}{x^2})\mathrm{d}x + (x + \frac{\sin 2y}{x} + 1)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, určete ji.

Řešení. Nejprve ověříme, zda je zadaný výraz opravdu diferenciálem. Označíme $P(x,y) = y - \frac{\sin^2 y}{x^2}$ a $Q(x,y) = x + \frac{\sin 2y}{x} + 1$. Podle věty 4.11 musí platit, že $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$. Spočteme parciální derivace

$$P_y(x,y) = \frac{x^2 - \sin 2y}{x^2}, \quad Q_x(x,y) = \frac{x^2 - \sin 2y}{x^2}$$

a dostáváme, že $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$. Zadaný výraz je tedy diferenciálem jisté kmenové funkce f. Dále platí

$$f(x,y) = \int \left(y - \frac{\sin^2 y}{x^2} \right) \mathrm{d}x = yx + \frac{\sin^2 y}{x} + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je integrační konstantou, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním funkce f podle proměnné y a dosazením do vztahu $f_y = Q$ dostáváme

$$f_y = x + \frac{\sin 2y}{x} + \varphi'(y) = x + \frac{\sin 2y}{x} + 1.$$

Odtud máme, že $\varphi'(y) = 1$, tedy $\varphi(y) = y + c$. Spočetli jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$f(x,y) = yx + \frac{\sin^2 y}{x} + y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.22. Najděte Taylorův vzorec druhého řádu funkce $f(x,y) = x^3 y^2$ v bodě $[-2,1]$.

Řešení. Podle (4.11) bude platit

$$f(x,y) = f(-2,1) + \mathrm{d}f(-2,1)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(-2,1)(h) + R_2(x,y),$$

kde $h = (h_1,h_2) = (x+2, y-1)$ a $R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(-2+\theta h_1, 1+\theta h_2)(h_1,h_2)$. Označme $\nu = -2 + \theta h_1$ a $\mu = 1 + \theta h_2$.
Funkce f má spojité parciální derivace až do třetího řádu v libovolném bodě $\mathbb{R}^2$, nebude tedy záviset na pořadí derivování.

$$\begin{array}{lll}
f_x(x,y) = 3x^2y^2, & f_{xx}(x,y) = 6xy^2, & f_{xxx}(x,y) = 6y^2, \\
f_y(x,y) = 2x^3y, & f_{yy}(x,y) = 2x^3, & f_{yyy}(x,y) = 0, \\
 & f_{xy}(x,y) = 6x^2y, & f_{xxy}(x,y) = 12xy, \\
 & & f_{xyy}(x,y) = 6x^2.
\end{array}$$

Po dosazení bodu $[-2, 1]$ vyjde

$$\begin{array}{lll} f(-2,1) = -8, & f_x(-2,1) = 12, & f_{xx}(-2,1) = -12, \\ f_y(-2,1) = -16, & f_{yy}(-2,1) = -16 & f_{yx}(-2,1) = 24. \end{array}$$

Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu (4.11) mají tvar:

$$\mathrm{d}f(-2,1)(h) = f_x(-2,1)h_1 + f_y(-2,1)h_2 = 12(x+2) - 16(y-1),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(-2,1)(h) &= f_{xx}(-2,1)h_1^2 + 2f_{xy}(-2,1)h_1h_2 + f_{yy}(-2,1)h_2^2 = \\ &= -12(x+2)^2 + 48(x+2)(y-1) - 16(y-1)^2. \end{aligned}$$

Taylorův polynom je

$$T_2(x,y) = f(-2,1) + \mathrm{d}f(-2,1)(x+2, y-1) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(-2,1)(x+2, y-1) =$$

$$= -8 + 12(x+2) - 16(y-1) - 6(x+2)^2 + 24(x+2)(y-1) - 8(y-1)^2.$$

Abychom vyjádřili Taylorův zbytek podle vzorce (4.10), potřebujeme diferenciál třetího řádu, tj.

$$\mathrm{d}^3 f(\nu,\mu)(h_1,h_2) = 6\mu^2 h_1^3 + 3(12\nu\mu)h_1^2 h_2 + 3(6\nu^2)h_1 h_2^2.$$

Pak

$$\begin{aligned} R_2(x,y) &= \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(\nu,\mu)(x+2, y-1) = \\ &= \mu^2(x+2)^3 + 6\nu\mu(x+2)^2(y-1) + 3\nu^2(x+2)(y-1)^2. \end{aligned}$$

Celkově pro funkci $f(x,y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x,y) &= T_2(x,y) + R_2(x,y) = \\ &= -8 + 12(x+2) - 16(y-1) - 6(x+2)^2 + 24(x+2)(y-1) - \\ &- 8(y-1)^2 + \mu^2(x+2)^3 + 6\nu\mu(x+2)^2(y-1) + 3\nu^2(x+2)(y-1)^2. \end{aligned}$$

Příklad 4.23. Pomocí Taylorova polynomu druhého řádu přibližně vypočtěte $\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99}$.

Řešení. K výpočtu použijeme vztah $T_2(x,y) \doteq f(x,y)$. Zvolíme funkci $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$, bod $[x_0, y_0] = [3, 1]$. Spočteme diference $h = x - x_0 = 0{,}01$,

$k = y - y_0 = -0{,}01$. Nejdříve spočteme požadované parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$, tj.

$$f_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{1}{4\sqrt{xy}}, \quad f_{xx}(x,y) = -\frac{y^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Spočteme hodnoty parciálních derivací v bodě $[3,1]$

$$f_x(3,1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad f_{xy}(3,1) = -\frac{3}{4\sqrt{3}}, \quad f_{xx}(3,1) = -\frac{1}{4\sqrt{27}},$$
$$f_y(3,1) = \frac{3}{2\sqrt{3}}, \quad f_{yy}(3,1) = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vzorce (4.11)

$$T_2(x,y) = f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(3,1)(h),$$

kde $h = (h_1, h_2)$ a $h_1 = x - 3$, $h_2 = y - 1$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\mathrm{d}f(3,1)(h) = f_x(3,1)h_1 + f_y(3,1)h_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) + \frac{3}{2\sqrt{3}}(y-1),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f(3,1)(h) &= f_{xx}(3,1)h_1^2 + 2f_{xy}(3,1)h_1h_2 + f_{yy}(3,1)h_2^2 = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{27}}(x-3)^2 - \frac{3}{2\sqrt{3}}(x-3)(y-1) + \frac{1}{4\sqrt{3}}(y-1)^2. \end{aligned}$$

Taylorův polynom je roven

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) + \frac{3}{2\sqrt{3}}(y-1) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4\sqrt{27}}(x-3)^2 - \frac{3}{2\sqrt{3}}(x-3)(y-1) + \frac{1}{4\sqrt{3}}(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Odtud

$$\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99} \doteq \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}0{,}01 + \frac{3}{2\sqrt{3}}(-0{,}01) - \frac{1}{8\sqrt{27}}(0{,}01)^2 -$$
$$-\frac{3}{4\sqrt{3}} \cdot 0{,}01(-0{,}01) + \frac{1}{8\sqrt{3}}(-0{,}01)^2 = 1{,}726\,325\ldots.$$

Příklad 4.24. Je dána funkce $f(x,y) = x^3\mathrm{e}^{2y}$ a bod $P = [-1, 0]$.

a) Určete totální diferenciál třetího řádu funkce f v bodě P.

b) Určete Taylorův polynom třetího řádu funkce f v bodě P.

Řešení. Definiční obor je $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$. Spočteme všechny potřebné parciální derivace až do třetího řádu. Derivace funkce f jsou spojité, a tedy nebude záviset na pořadí derivování.

$$
\begin{array}{lll}
f_x(x,y) = 3x^2\mathrm{e}^{2y}, & f_{xx}(x,y) = 6x\mathrm{e}^{2y}, & f_{xxx}(x,y) = 6\mathrm{e}^{2y} \\
f_y(x,y) = 2x^3\mathrm{e}^{2y}, & f_{yy}(x,y) = 4x^3\mathrm{e}^{2y}, & f_{yyy}(x,y) = 8x^3\mathrm{e}^{2y}, \\
 & f_{xy} = 6x^2\mathrm{e}^{2y}, & f_{xyx}(x,y) = 12x\mathrm{e}^{2y}, \\
 & & f_{xyy}(x,y) = 12x^2\mathrm{e}^{2y}.
\end{array}
$$

Po dosazení bodu $[-1,0]$ vyjde

$$
\begin{array}{lll}
f_x(-1,0) = 3, & f_{xx}(-1,0) = -6, & f_{xxx}(-1,0) = 6, \\
f_y(-1,0) = -2, & f_{yy}(-1,0) = -4, & f_{yyy}(-1,0) = -8, \\
 & f_{xy}(-1,0) = 6, & f_{xxy}(-1,0) = -12, \\
 & & f_{yyx}(-1,0) = 12.
\end{array}
$$

a) Totální diferenciál třetího řádu v bodě $[-1,0]$ existuje a podle vzorce (4.8) je

$$\mathrm{d}^3 f(-1,0)(h,k) \;=\; 6h^3 - 36h^2k + 36hk^2 - 8k^3.$$

b) Vypočtené hodnoty dosadíme do vztahu (4.11)

$$T_3(x,y) = f(-1,0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(-1,0)(h) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(-1,0)(h) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(-1,0)(h),$$

kde $h = (h_1,h_2)$ a $h_1 = x+1$, $h_2 = y$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\mathrm{d}f(-1,0)(h) = f_x(-1,0)h_1 + f_y(-1,0)h_2 = 3(x+1) - 2y,$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(-1,0)(h) &= f_{xx}(-1,0)h_1^2 + 2f_{xy}(-1,0)h_1h_2 + f_{yy}(-1,0)h_2^2 = \\
&= -6(x+1)^2 + 12(x+1)y - 4y^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}^3 f(-1,0)(h) = f_{xxx}(-1,0)h_1^3 + 3f_{xxy}(-1,0)h_1^2h_2 + 3f_{xyy}(-1,0)h_1h_2^2 + \\
&+f_{yyy}(-1,0)h_2^3 = 6(x+1)^3 - 36(x+1)^2y + 36(x+1)y^2 - 8y^3.
\end{aligned}
$$

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom a dostáváme

$$
\begin{aligned}
T_3(x,y) &= -1+3(x+1)-2y+\frac{1}{2!}[-6(x+1)^2+12(x+1)y-4y^2]+\\
&+ \frac{1}{3!}[6(x+1)^3-36(x+1)^2y+36(x+1)y^2-8y^3]=\\
&= x^3-\frac{4}{3}y^3+4y^2-6x^2y+6xy^2-6xy-2y.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.25. Je dána funkce $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$ a bod $P=[2,1,1]$.

a) Určete totální diferenciál druhého řádu funkce f v bodě P.

b) Určete Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě P.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; x>0, z\neq 0\}$. Protože funkce f má spojité parciální derivace druhého řádu v libovolném bodě svého definičního oboru, diferenciál existuje. Z příkladu 4.18 známe hodnoty prvních parciálních derivací. Nyní vypočítáme parciální derivace druhého řádu:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y,z) &= \frac{x^{(y/z)-2}y(y-z)}{z^2}, & f_{xy}(x,y,z) &= \frac{x^{(y/z)-1}(z+y\ln x)}{z^2},\\
f_{xz}(x,y,z) &= -\frac{yx^{(y/z)-1}(z+y\ln x)}{z^3}, & f_{yy}(x,y,z) &= \frac{x^{y/z}\ln^2 x}{z^2},\\
f_{yz}(x,y,z) &= -\frac{zx^{y/z}\ln(x)(z+y\ln x)}{z^3}, & &\\
f_{zz}(x,y,z) &= \frac{y\ln(x)x^{y/z}(2z+y\ln x)}{z^4}. & &
\end{aligned}
$$

Dosadíme bod $[2,1,1]$

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(2,1,1) &= 0, & f_{xy}(2,1,1) &= 1+\ln 2,\\
f_{xz}(2,1,1) &= -1-\ln 2, & f_{yy}(2,1,1) &= 2\ln^2 2,\\
f_{yz}(2,1,1) &= -2\ln 2-2\ln^2 2, & f_{zz}(2,1,1) &= 4\ln 2+2\ln^2 2.
\end{aligned}
$$

a) Totální diferenciál druhého řádu v bodě $[2,1,1]$ získáme dosazením do vzorce (4.8)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(2,1,1)(h_1,h_2,h_3) &= 2\ln^2 2h_2^2+(4\ln 2+2\ln^2 2)h_3^2+2(1+\ln 2)h_1h_2-\\
&- 2(1+\ln 2)h_1h_3-2(2\ln 2+2\ln^2 2)h_2h_3.
\end{aligned}
$$

b) Taylorův polynom druhého řádu v bodě $[2, 1, 1]$ získáme dosazením do vzorce (4.11)

$$T_2(x, y, z) = f(2, 1, 1) + \mathrm{d}f(2, 1, 1)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(2, 1, 1)(h),$$

kde $h = (h_1, h_2, h_3)$ a $h_1 = x-2$, $h_2 = y-1$, $h_3 = z-1$. Diferenciály potřebné k sestavení Taylorova polynomu mají tvar:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(2,1,1)(h) &= f_x(2,1,1)h_1 + f_y(2,1,1)h_2 + f_z(2,1,1)h_3 = \\ &= (x-2) + 2\ln 2(y-1) - 2\ln 2(z-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(2,1,1)(h) &= f_{xx}(2,1,1)h_1^2 + f_{yy}(2,1,1)h_2^2 + f_{zz}(2,1,1)h_3^2 + \\ &+ 2f_{xy}(2,1,1)h_1h_2 + 2f_{xz}(2,1,1)h_1h_3 + 2f_{yz}(2,1,1)h_2h_3 = \\ &= 2\ln^2 2(y-1)^2 + (4\ln 2 + 2\ln^2 2)(z-1)^2 + \\ &+ 2(1+\ln 2)(x-2)(y-1) - 2(1+\ln 2)(x-2)(z-1) - \\ &- 2(2\ln 2 + 2\ln^2 2)(y-1)(z-1).\end{aligned}$$

Spočtené diferenciály dosadíme do vztahu pro Taylorův polynom a dostáváme

$$\begin{aligned}T_2(x,y,z) &= 2 + (x-2) + 2\ln 2(y-1) - 2\ln 2(z-1) + \ln^2 2(y-1)^2 + \\ &+ (2\ln 2 + \ln^2 2)(z-1)^2 + (1+\ln 2)(x-2)(y-1) - \\ &- (1+\ln 2)(x-2)(z-1) - (2\ln 2 + 2\ln^2 2)(y-1)(z-1).\end{aligned}$$

4.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 4.1. Pomocí definice ověřte, zda $\mathrm{d}f(1,0)(h_1,h_2) = 0$ pro zadanou funkci $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$.

Cvičení 4.2. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = yz^2 \operatorname{tg}(x + \frac{x}{y})$ v bodě $[\frac{\pi}{8}, 1, 2]$.

Cvičení 4.3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $[-1, 1]$.

Cvičení 4.4. V bodě $[4,1]$ určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y) = \sin(\pi xy + \ln y)$.

Cvičení 4.5. V bodě $[-4, \frac{\pi}{3}, 2]$ určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{z^2+x} \cos y$.

Cvičení 4.6. Určete totální diferenciál třetího řádu funkce $f(x,y) = x \ln \frac{y}{x}$ v obecném bodě.

Cvičení 4.7. Zjistěte, zda daný výraz $(y^2 \sin 2x)\mathrm{d}x + (-y \cos 2x - 4)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, určete ji.

Cvičení 4.8. Najděte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f(x,y) = \ln(2x^3 - 8y^2)$ v bodě $[2, 1]$.

Cvičení 4.9. Spočtěte Maclaurinův polynom druhého řádu funkce $f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^x + \sin 2y}$ a s jeho pomocí přibližně určete $\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}} + \sin 1}$.

Cvičení 4.10. Spočtěte Taylorův polynom třetího řádu se středem v bodě $[1, \sqrt{3}]$ pro funkci $f(x,y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Cvičení 4.11. Určete Taylorův polynom druhého řádu se středem v bodě $[1, 2, 4]$ pro funkci $f(x,y,z) = \frac{x-y}{z}$.

5 Parciální derivace složených funkcí

5.1 Definice a věty

Definice 5.1. Nechť jsou funkce $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ definovány na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž množina všech příslušných bodů $[u, v]$ leží v množině $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, na které je definována funkce $z = f(u, v)$. Pak je na množině Ω definována funkce

$$z = F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y)),$$

kterou nazýváme **složenou funkcí**. Funkce g, h nazýváme jejími **vnitřními složkami** a funkci f její **vnější složkou**.

Poznámka 5.2. Podobně jako pro funkce dvou proměnných můžeme definovat předpisem

$$w = F(x, y, z) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z))$$

složenou funkci tří proměnných, přičemž jejími vnitřními složkami jsou funkce $u_1 = g_1(x, y, z)$, $u_2 = g_2(x, y, z)$ a $u_3 = g_3(x, y, z)$ a vnější složkou je funkce $w = f(u_1, u_2, u_3)$. Obecně je pak předpisem

$$z = F(x_1, x_2..., x_n) = f(g_1(x_1, x_2..., x_n), g_2(x_1, x_2..., x_n), ..., g_m(x_1, x_2..., x_n))$$

definovaná složená funkce n proměnných, jejímiž vnitřními složkami jsou funkce $u_k = g_k(x_1, x_2..., x_n)$, $1 \leq k \leq m$ a vnější složkou je funkce m proměnných $z = f(u_1, u_2, ..., u_m)$.

Věta 5.3. *Nechť funkce $u = g(x, y)$ a $v = h(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu na otevřené množině Ω a funkce $z = f(u, v)$ je diferencovatelná v každém bodě otevřené množiny Γ. Potom za předpokladů uvedených v předcházející definici má složená funkce $z = F(x, y) = f(g(x, y), k(x, y))$ na množině Ω parciální derivace prvního řádu a platí vztahy*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad a \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Věta 5.4. *Nechť jsou funkce* $u_1 = g_1(x_1, ..., x_n)$,...,$u_m = g_m(x_1, ..., x_n)$ *spojitě diferencovatelné na oblasti* Ω *a funkce* $z = f(u_1, ..., u_m)$ *je spojitě diferencovatelná na oblasti* Γ. *Potom je složená funkce*

$$z = F(x_1, .., x_n) = f(g_1(x_1, .., x_n), ..., g_m(x_1, .., x_n))$$

na oblasti Ω *spojitě diferencovatelná a pro její parciální derivace podle jednotlivých proměnných platí vztahy*

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

pro všechna $j = 1, ..., n$.

5.2 Řešené příklady

Příklad 5.5. Uvažujme funkci $z = \mathrm{e}^{x^3(x-y^2)^2}$. Navrhněte, jak by mohly vypadat její vnitřní složky a vnější složka, pokud bychom tuto funkci chtěli chápat jako složenou funkci.

Řešení. Chceme-li přistupovat k nějaké funkci jako ke složené funkci, je zapotřebí si uvědomit, že závislost proměnné z na proměnných x a y bude "zprostředkována" pomocí jiných proměnných. Není přitom určeno jednoznačně, o jaký počet proměnných se jedná, ani to, jak mají tyto závislosti vypadat. Máme tedy značnou volnost v tom, jak k úloze přistoupíme. Vyjděme třeba ze skutečnosti, že v exponentu zadané funkce se vyskytuje součin dvou funkcí, a položme

$$u = g(x, y) = x^3 \qquad v = h(x, y) = x - y^2.$$

Tím jsme vymezili vnitřní složky a zároveň odtud dostáváme, že vnější složkou je funkce $z = f(u, v) = \mathrm{e}^{uv^2}$.

Pokud bychom provedli volbu vnitřních složek ve tvaru

$$u = g(x, y) = x^3 \qquad v = h(x, y) = (x - y^2)^2,$$

měla by pak vnější složka složené funkce tvar $z = f(u, v) = \mathrm{e}^{uv}$.

Jaké další možnosti vás napadají?

Příklad 5.6. Uvažujme funkci $z = x^4y^6\cos(x^3 + y^3)$. Navrhněte, jak by mohly vypadat její vnitřní složky a vnější složka, pokud bychom tuto funkci chtěli chápat jako složenou funkci.

Řešení. Ve světle úvah prováděných v předcházejícím příkladě můžeme např. položit

$$u = g(x, y) = x^4y^6 \qquad v = h(x, y) = x^3 + y^3.$$

Odtud dostáváme, že vnější složkou je funkce $z = f(u, v) = u\cos v$.

Můžeme ale také zvolit

$$u = g(x, y) = x^2y^3 \qquad v = h(x, y) = x^3 + y^3.$$

Pak by vnější složka složené funkce měla tvar $z = f(u, v) = u^2\cos v$.

Jaké další možnosti vás napadají?

Příklad 5.7. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = u\sqrt{1 + v^2}$, kde $u = \mathrm{e}^{2x}$, $v = \mathrm{e}^{-x}$.

Řešení. V tomto případě je proměnná z funkcí proměnné x. Máme tedy vypočítat obyčejnou derivaci funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

který v našem případě dává

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + v^2} \cdot 2\mathrm{e}^{2x} + \frac{uv}{\sqrt{1 + v^2}} \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) =$$

$$= \frac{(1 + \mathrm{e}^{-2x})2\mathrm{e}^{2x} - 1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-2x}}} = \frac{2\mathrm{e}^{2x} + 1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{-2x}}}.$$

Příklad 5.8. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$, $w = \mathrm{e}^x$.

Řešení. Opět se jedná o výpočet obyčejné derivace funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

který nyní dává

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = v^2w^3 \cdot \cos x + 2uvw^3 \cdot \sin x + 3uv^2w^2 \cdot \mathrm{e}^x =$$

$$= \mathrm{e}^{3x} \cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x) = \mathrm{e}^{3x} \cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x).$$

Příklad 5.9. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$, $v = x^2 - y^2$ podle proměnných x a y.

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.3, podle kterých máme nejdříve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

a odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos u \cos v \cdot 2(x-y) + (-\sin u \sin v) \cdot 2x =$$

$$= 2x\cos(u+v) - 2y\cos u \cos v.$$

Parciální derivaci podle y vypočteme podle vtahu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos u \cos v \cdot (-2)(x-y) + (-\sin u \sin v) \cdot (-2y) =$$

$$= 2y\cos(u-v) - 2x\cos u \cos v.$$

Příklad 5.10. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $w = yz^2 - x^3$, kde $x = \mathrm{e}^{r-t}$, $y = \ln(r+2s+3t)$ a $z = \sqrt{rs+t}$ podle proměnných r, s a t.

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.4, kdy $m = n = 3$. Máme

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = -3x^2 \cdot \mathrm{e}^{r-t} + z^2 \cdot \left(\frac{1}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{s}{2\sqrt{rs+t}}\right) = -3\mathrm{e}^{3(r-t)} + \frac{rs+t}{r+2s+3t} + s\ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = -3x^2 \cdot 0 + z^2 \cdot \left(\frac{2}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{r}{2\sqrt{rs+t}}\right) = \frac{2(rs+t)}{r+2s+3t} + r\ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -3x^2 \cdot (-\mathrm{e}^{r-t}) + z^2 \cdot \left(\frac{3}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{rs+t}}\right) = 3\mathrm{e}^{3(r-t)} + \frac{3(rs+t)}{r+2s+3t} + \ln(r+2s+3t).$$

Příklad 5.11. Je dáno $g(x,y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, přičemž o funkci f předpokládáme, že je diferencovatelná. Ukažte, že funkce g vyhovuje rovnici

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Položme $u = x^2 - y^2$ a $v = y^2 - x^2$. Potom na základě pravidla pro derivování složené funkce obdržíme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(-2x),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y).$$

Odtud vyplývá

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = \left(2xy\frac{\partial f}{\partial u} - 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-2xy\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$$

Příklad 5.12. Je-li dán tlak v kilopascalech, objem v litrech a teplota ve stupních Kelvina jednoho molu ideálního plynu, pak jsou tyto tři veličiny svázány vztahem $PV = 8{,}31T$. Určete, jak rychle se mění v daném okamžiku tlak, jestliže stávající teplota 300 K narůstá rychlostí 0,2 K/s a stávající objem 100 l narůstá rychlostí 0,3 l/s.

Řešení. Máme vypočítat $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$, přičemž $P = 8{,}31\frac{T}{V}$.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{8{,}31}{V} \cdot 0{,}2 - \frac{8{,}31T}{V^2} \cdot 0{,}3 = \frac{1{,}662}{V} - \frac{2{,}493T}{V^2}.$$

Vypočteme-li hodnotu této derivace v zadaném bodě, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(300, 100) = \frac{1{,}662}{100} - \frac{2{,}493 \cdot 300}{100^2} = -0{,}05817\,\mathrm{kPa/s}.$$

Příklad 5.13. Poloměr podstavy rotačního kuželu narůstá rychlostí 6 mm/s, zatímco jeho výška roste rychlostí 9 mm/s. Jak rychle roste jeho objem, jestliže je dáno $r = 13\,\mathrm{mm}$ a $h = 20\,\mathrm{mm}$?

Řešení. Máme vypočítat $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, přičemž $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\pi r h \cdot 4 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 9 =$$

$$= 4\pi r h + 3\pi r^2.$$

Vyčíslíme-li hodnotu této derivace v zadaném bodě, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(13, 20) = \pi(4 \cdot 13 \cdot 20 + 3 \cdot 13^2) = 1547\pi\,\mathrm{mm}^3/s.$$

Příklad 5.14. Uvažujme funkci $z = f(u, v)$, která má spojité parciální derivace druhého řádu. Dále je dáno $u = (x^2 + y^2)$ a $v = 2xy$. Vypočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Řešení. Vyjdeme ze vtahu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}(2x) + \frac{\partial z}{\partial v}(2y).$$

Nyní na tento vztah aplikujeme pravidlo o derivaci součinu funkcí, čímž dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial z}{\partial u} + 2y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right). \quad (5.1)$$

V dalším aplikujeme znovu pravidlo pro derivování složené funkce na výrazy $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$. Obdržíme vztahy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 2x + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot 2y.$$

Dosadíme-li tyto vztahy do výrazů v rovnici 5.1, pak s využitím Schwarzovy věty, která zaručuje rovnost smíšených derivací druhého řádu, získáme požadovaný vztah ve tvaru

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\left(2x\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + 2y\left(2x\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) =$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 8xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

5.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 5.1. Vypočtěte derivaci funkce $z = f(x, y) = \operatorname{arctg}(v/u)$, kde $u = \cos 3x$, $y = \sin 5x$.

Cvičení 5.2. Vypočtěte derivaci funkce $z = f(x, y) = \ln(x + y^2)$, jestliže $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 1 + \sqrt{t}$.

Cvičení 5.3. Vypočtěte derivaci funkce $z = f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$, kde $x = t$, $y = \sqrt{t}$.

Cvičení 5.4. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = s - t$, $y = s + t$, $z = \sqrt{st}$.

Cvičení 5.5. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = s^2 r$, $y = r^2 s$, $z = 4\mathrm{e}^t$.

Cvičení 5.6. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = x^2 y + y z^2$, $x = rst$, $y = rs/t$, $z = 1/rst$.

Cvičení 5.7. Vypočtěte $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, je-li dáno $w = f(x, y, z) = \mathrm{e}^{\frac{xy}{z}}$, kde $x = r^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = r^2 + s^2$.

Cvičení 5.8. Uvažujme funkci $z = f(x, y)$, kde $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Vypočtěte $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \phi}$.

Cvičení 5.9. Jestliže $z = f(x - y)$, rozhodněte, zda platí $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Cvičení 5.10. Ukažte, že každá funkce tvaru $z = f(x + at) + g(x - at)$ je řešením rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6 Derivace v daném směru

6.1 Definice a věty

Definice 6.1. Nechť je funkce $f(x,y)$ definovaná na oblasti Ω, ve které leží bod $[x_0,y_0]$, a nechť $\vec{u}=(u_1,u_2)$. Jestliže existuje limita tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h},$$

nazýváme ji **směrovou derivací** funkce $f(x,y)$ ve směru vektoru $\vec{u}$ v bodě $[x_0,y_0]$ a značíme ji

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0).$$

Poznámka 6.2. Obdobným způsobem je možné definovat pojem směrové derivace pro funkci tří a více proměnných v bodě $[x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*]$, tj. jako limitu tvaru

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^*+hu_1,x_2^*+hu_2,\dots x_n^*+hu_n)-f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)}{h}=$$
$$=f_{\vec{u}}(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*).$$

Věta 6.3. *Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $[x_0,y_0]$, pak má v tomto bodě směrovou derivaci ve směru libovolného vektoru $\vec{u}=(u_1,u_2)$ a platí vztah*

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)u_1+f_y(x_0,y_0)u_2.$$

Definice 6.4. Nechť je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $[x_0,y_0]$. **Gradientem** funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ nazýváme vektor, jehož souřadnicemi jsou parciální derivace fce f v tomto bodě a značíme jej

$$\nabla f(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0,f_y(x_0,y_0)).$$

Věta 6.5. *Předpokládejme, že funkce f je v bodě $[x_0,y_0]$ diferencovatelná a platí $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$. Pak je hodnota směrové derivace funkce f ve směru vektorů o stejné nenulové délce maximální pro vektor, který má stejný směr jako gradient.*

6.2 Řešené příklady

Příklad 6.6. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = xy^2$ v bodě $[4,-1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2,3)$.

Řešení. Podle věty (6.3) stačí vypočítat parciální derivace funkce $f(x,y)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = y^2, \quad \text{tj. } f_x(4,-1) = 1 \qquad \text{a} \qquad f_y = 2yx, \quad \text{tj. } f_y(4,-1) = -8$$

a po dosazení do příslušného vztahu dostáváme

$$f_{\vec{u}}(4,-1) = 1 \cdot 2 + (-8) \cdot (3) = -22.$$

Příklad 6.7. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = y^2 \ln x$ v bodě $[1,4]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $\pi/6$.

Řešení. Derivaci budeme počítat ve směru vektoru $(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$. Jestliže dále vypočteme

$$f_x = y^2/x, \quad \text{tj. } f_x(1,4) = 16 \qquad \text{a} \qquad f_y = 2y \ln x, \quad \text{tj. } f_y(1,4) = 0,$$

dostáváme po dosazení do příslušného vztahu

$$f_{\vec{u}}(1,4) = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Příklad 6.8. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = x \ln y - \mathrm{e}^{xz^3}$ v bodě $[-5,1,-2]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1,-1,3)$.

Řešení. Analogický vztah jako ve větě (6.3) platí i pro funkce tří a více proměnných. Nejdříve je zapotřebí vypočítat parciální derivace prvního řádu funkce $f(x,y,z)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = \ln y - z^3 \mathrm{e}^{xz^3}, \quad f_x(-5,1,-2) = 8\mathrm{e}^{40}, \quad f_y = x/y, \quad f_y(-5,1,-2) = -5$$

$$\text{a} \qquad f_z = -3xz^2 \mathrm{e}^{xz^3}, \quad f_z(-5,1,-2) = 60\mathrm{e}^{40}$$

a po dosazení do příslušného vztahu dostáváme

$$f_{\vec{u}}(-5,1,-2) = (8\mathrm{e}^{40}) \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) + (60\mathrm{e}^{40}) \cdot 3 = 5 + 188\mathrm{e}^{40}.$$

Příklad 6.9. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = z - \mathrm{e}^x \sin y$ v bodě $[\ln 3, 3\pi/2, -3]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (2,3,6)$.

Řešení. Opět je zapotřebí vypočítat parciální derivace funkce $f(x,y,z)$ v daném bodě. Máme tedy

$$f_x = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad \text{tj. } f_x(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 3,$$

$$f_y = -\mathrm{e}^x \cos y, \quad \text{tj. } f_y(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 0$$

a

$$f_z = 1, \quad \text{tj. } f_z(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 1.$$

Po dosazení do příslušného vztahu dostáváme

$$f_{\vec{u}}(\ln 3, 3\pi/2, -3) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 12.$$

Příklad 6.10. Vypočtěte gradient funkce $f(x,y) = \sqrt{x^3y - y^3}$ v bodě $[2,2]$.

Řešení. Složkami gradientu funkce f v daném bodě jsou parciální derivace funkce fv tomto bodě. Máme tedy

$$\nabla f(2,2) = (f_x(2,2), f_y(2,2)).$$

Ze vztahů

$$f_x = \frac{3x^2y}{2\sqrt{x^3y - y^3}} \qquad \text{a} \qquad f_y = \frac{x^3 - 3y^2}{2\sqrt{x^3y - y^3}}$$

plyne

$$\nabla f(2,2) = (f_x(2,2), f_y(2,2)) = (\frac{6}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Příklad 6.11. Vypočtěte gradient funkce $f(x,y,z) = x^2z^2 \sin(4y)$ v bodě $[-2, \pi/3, 1]$.

Řešení. Složkami gradientu funkce f v daném bodě jsou parciální derivace funkce fv tomto bodě. Máme tedy

$$\nabla f(-2,\pi/3,1) = (f_x(-2,\pi/3,1), f_y(-2,\pi/3,1), f_z(-2,\pi/3,1)).$$

Ze vztahů

$$f_x = 2xz^2 \sin(4y), \qquad f_y = 4x^2z^2 \cos(4y) \qquad \text{a} \qquad f_z = 2x^2z \sin(4y)$$

plyne

$$\nabla f(-2, \pi/3, 1) = (2\sqrt{3}, -8, -4\sqrt{3}).$$

Příklad 6.12. Najděte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = 2x^2y + x\mathrm{e}^{y^2}$ v bodě $[1, 0]$ pro vektory délky 1 a jednotkový vektor, pro který toto maximum nastává.

Řešení. Parciální derivace funkce f jsou dány vztahy

$$f_x = 4xy + \mathrm{e}^{y^2} \qquad \text{a} \qquad f_y = 2x^2 + 2xy\mathrm{e}^{y^2},$$

což nám dává

$$\nabla f(1, 0) = (1, 2).$$

Jednotkový vektor, který má stejný směr jako gradient, má tedy souřadnice $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Maximální hodnota směrové derivace pak vychází $\sqrt{5}$.

Příklad 6.13. Najděte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ v bodě $[1, 2, -3]$ pro vektory délky 1 a jednotkový vektor, pro který toto maximum nastává.

Řešení. Parciální derivace funkce f jsou dány vztahy

$$f_x = -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad f_y = -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \quad \text{a} \quad f_z = -\frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

což nám dává

$$\nabla f(1, 2, -3) = \left(-\frac{1}{98}, -\frac{1}{49}, \frac{3}{98}\right).$$

Jednotkový vektor, který má stejný směr jako gradient, má tedy souřadnice $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$. Maximální hodnota směrové derivace pak vychází $\sqrt{14}/98$.

Příklad 6.14. Teplota vyhřívaného kovového plátu v bodě $[x, y]$ je ve stupních Celsia dána vztahem

$$T(x, y) = \frac{300}{x^2 + y^2 + 3},$$

přičemž hodnoty x a y jsou udávány v centimetrech. Jakým směrem se máme pohybovat z bodu $[-4, 3]$, jestliže chceme sledovat nejprudší nárůst teploty v plátu? Jaký je okamžitý nárůst teploty, pokud se z bodu $[-4, 3]$ vydáme tímto směrem?

Řešení. Víme, že k nejrychlejšímu růstu funkčních hodnot dochází ve směru gradientu. V našem případě máme

$$T_x = -\frac{600x}{(x^2+y^2+3)^2} \quad \text{a} \qquad T_y = -\frac{600y}{(x^2+y^2+3)^2}.$$

Gradientem funkce T v bodě $[-4,3]$ je tedy vektor

$$\nabla T(-4,3) = \left(\frac{2400}{784}, -\frac{1800}{784}\right).$$

Jednotkový vektor $\vec{u}$ mající stejný směr jako gradient má tedy souřadnice $\vec{u} = (4/5, 3/5)$. Maximální hodnota směrové derivace ve směru gradientu, resp. vektoru $\vec{u}$, uvažujeme-li vektory jednotkové délky, je $\frac{375}{98}$. To znamená, že okamžitý nárůst teploty v bodě $[-4,3]$ je $\frac{375}{98} \approx 3{,}83$ stupňů Celsia na jeden centimentr vzdálenosti.

Příklad 6.15. Stojíte na kopci, jehož tvar je popsán funkcí $f(x,y) = 500 - 0,003x^2 - 0,004y^2$. Vaše poloha je dána bodem $[-100,-100,430]$. Jak prudké stoupání vás čeká, jestliže se vydáte na severozápad?

Řešení. Máme-li se pohybovat severozápadním směrem, odpovídá to v kartézské soustavě souřadné směru, který je dán úhlem $3\pi/4$ neboli $135°$. To znamená, že máme vypočítat směrovou derivaci ve směru vektoru $\vec{u} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Parciální derivace v bodě $[-100,-100]$ mají hodnoty

$$f_x(-100,-100) = -0,6 \quad \text{a} \qquad f_y(-100,-100) = -0,8.$$

Hodnota požadované směrové derivace činí

$$f_{\vec{u}}(-100,-100) = 0,6 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0,8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,14.$$

Při cestě severozápadním směrem nás tedy čeká čtrnáctiprocentní stoupání.

6.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 6.1. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sqrt{x-y}$ v bodě $[5, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (12, 5)$.

Cvičení 6.2. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$ v bodě $[1, \pi/6]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, -1)$.

Cvičení 6.3. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^2y^3 + 2x^4y$ v bodě $[1, -2]$ ve směru jednotkového vektoru daného úhlem $\pi/6$.

Cvičení 6.4. Vypočtěte směrovou derivaci funkce, která je daná vztahem $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $[-1, 2, 3]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, -1, 1)$.

Cvičení 6.5. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$ v bodě $[-2, 2, 1]$ ve směru záporné poloosy z.

Cvičení 6.6. Vypočtěte gradient funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ v bodě $[1, -2]$.

Cvičení 6.7. Vypočtěte gradient funkce tří proměnných, která je daná vztahem $f(x, y, z) = 2\sqrt{xyz}$ v bodě $[3, -4, -3]$.

Cvičení 6.8. Najděte minimální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = \operatorname{tg}(x^2+y^2)$ v bodě $[\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6}]$ pro vektory jednotkové délky a vektor, pro který toto minimum nastává.

Cvičení 6.9. Najděte maximální hodnotu směrové derivace funkce dané vztahem $f(x, y) = x^2 + 4xz + 2yz^2$ v bodě $[1, 2, -1]$ pro vektory jednotkové délky a vektor, pro který toto maximum nastává.

Cvičení 6.10. Teplota vyhřívaného kovového plátu v bodě $[x, y]$ je ve stupních Celsia dána vztahem

$$T(x, y) = \frac{400}{x^2 + y^2 + 2},$$

přičemž hodnoty x a y jsou udávány v centimetrech. Jakým směrem se máme pohybovat z bodu $[1, 1]$, jestliže chceme sledovat nejprudší nárůst teploty v plátu? Jaký je okamžitý nárůst teploty, pokud se z bodu $[1, 1]$ vydáme tímto směrem?

7 Implicitní funkce

7.1 Definice a věty

Definice 7.1. Nechť F je funkce dvou proměnných, Ω množina všech řešení rovnice $F(x,y)=0$ a nechť $[x_0,y_0]\in\Omega$ je bod. Jestliže existuje okolí $\mathcal{O}=(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ bodu $[x_0,y_0]$ takové, že množina $\Omega\cap\mathcal{O}$ je totožná s grafem funkce $y=f(x)$, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[x_0,y_0]$ definována **implicitně** rovnicí $F(x,y)=0$.

Věta 7.2. *Nechť $F(x,y)$ je funkce dvou proměnných a má tyto tři vlastnosti:*

- *má na okolí $\mathcal{O}=(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$, $\delta>0$, $\varepsilon>0$, bodu $[x_0,y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu,*
- *v bodě $[x_0,y_0]$ je $F(x_0,y_0)=0$,*
- *parciální derivace $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.*

Pak je rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí $\mathcal{O}([x_0,y_0])$ bodu $[x_0,y_0]$ implicitně definována právě jedna funkce $y=f(x)$ taková, že

- *má graf procházející bodem $[x_0,y_0]$, tj. $y_0=f(x_0)$,*
- *$F(x,f(x))=0$,*
- *je spojitá v okolí bodu x_0, tj. $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,*
- *má spojitou první derivaci, pro niž platí*

$$y'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\quad \text{pro } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta). \tag{7.1}$$

Poznámka 7.3.

1. Vzorec $y'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ můžeme také psát ve tvaru $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ nebo $f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

2. Je-li funkce $y = f(x)$ dána rovnicí $F(x, y) = 0$ a funkce $F(x, y)$ je jedenkrát spojitě diferencovatelná, můžeme použít pravidla pro derivovaní složené funkce a dostaneme

$$F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

pro $F_y \neq 0$. Tímto způsobem můžeme odvodit i vyšší derivace funkce $y = f(x)$ dané implicitně, což formuluje následující věta.

Věta 7.4. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.2 a funkce F má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace do řádu k, $k \in \mathbb{N}$. Pak implicitně daná funkce $y = f(x)$ má spojité derivace do řádu k. Jejich vzorce dostaneme opakovaným derivováním vztahu (7.1).*

3. Bez ztráty na obecnosti uvažujeme rovnici $F(x, y) = 0$, jelikož obecnou rovnici $G(x, y) = H(x, y)$ lze vždy upravit a všechny její členy převést na levou stranu, tedy $G(x, y) - H(x, y) = 0$. Pak stačí položit $F = G - H$.

Definice 7.5. O funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ řekneme, že je v okolí bodu $[x_0, y_0 y_0] \in \Omega$ **implicitně** zadána rovnicí $F(x, y, z) = 0$, jestliže je množina Ω v okolí bodu $[x_0, y_0 y_0]$ totožná s grafem funkce $z = f(x, y)$, tj. v okolí bodu $[x_0, y_0 y_0]$ platí $F(x, y, f(x, y)) = 0$ a $f(x_0, y_0) = z_0$.

Věta 7.6. *Nechť $F(x, y, z)$ je funkce tří proměnných a má tyto tři vlastnosti:*

- *má na okolí $\mathcal{O} = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\varepsilon > 0$, bodu $[x_0, y_0, z_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu,*
- *v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,*
- *parciální derivace $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.*

Pak je rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí $\mathcal{O}([x_0, y_0, z_0])$ bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně definována právě jedna funkce $z = f(x, y)$, kde

$$f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2 \to (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon),$$

taková, že

- *identicky vyhovuje rovnici $F(x, y, z) = 0$, takže $F(x, y, f(x, y)) = 0$,*
- *prochází bodem $[x_0, y_0]$, takže $z_0 = f(x_0, y_0)$,*
- *je spojitá na okolí bodu $[x_0, y_0]$ a má spojité první parciální derivace*

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{7.2}$$

Věta 7.7. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.6 a funkce F má v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ spojité parciální derivace do řádu k, $k \in \mathbb{N}$. Pak implicitně daná funkce $z = f(x, y)$ má spojité derivace do řádu k. Jejich vzorce dostaneme opakovaným derivováním vztahu (7.2).*

7.2 Řešené příklady

Příklad 7.8. Ověřte, že rovnice $x^y - y^x = 0$, $x > 0$, $y > 0$, zadává v bodě $[1, 1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Vypočítejte její první derivaci a vyčíslete její hodnotu v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^y - y^x$, $[x_0, y_0] = [1, 1]$. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2. Platí $F(1, 1) = 1 - 1 = 0$ a

$$F_y(x, y) = x^y \ln x - xy^{x-1} \quad \Rightarrow \quad F_y(1, 1) = -1 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, tudíž je rovnicí $x^y - y^x = 0$ v okolí bodu $[1, 1]$ určena implicitně právě jedna funkce $y = f(x)$ taková, že $f(1) = 1$. Derivováním $F(x, y)$ podle x dostáváme

$$F_x(x, y) = yx^{y-1} - y^x \ln y \quad \Rightarrow \quad F_x(1, 1) = 1.$$

Odtud

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}} \quad \Rightarrow \quad y'(1) = 1.$$

Místo použití vzorce (7.1) můžeme použít alternativní přístup. Zderivujeme rovnici $x^y - y^x = 0$ podle x. Derivace dává

$$(x^y - y^x)' = (\mathrm{e}^{y \ln x} - \mathrm{e}^{x \ln y})' = \mathrm{e}^{y \ln x}(y' \ln x + \frac{y}{x}) - \mathrm{e}^{x \ln y}(\ln y + y' \frac{x}{y}) = 0,$$

$$yx^{y-1} + y'x^y \ln x - y^x \ln y - xy'y^{x-1} = 0,$$

odtud vyjádřením y' dostáváme

$$y' = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}} \quad \Rightarrow \quad y'(1) = 1.$$

Příklad 7.9. Ověřte, že rovnice $\mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 = 1 + \pi^2$ zadává v bodě $[0, \pi]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Vypočítejte její první derivaci a spočtěte její hodnotu v daném bodě.

Řešení. Označme $F(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 - 1 - \pi^2$, $[x_0, y_0] = [0, \pi]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Při výpočtu budeme vycházet z věty 7.2. Nejdříve ověříme, že $F(0, \pi) = 0$. Skutečně $\mathrm{e}^{0\cdot\pi} + 0 + \pi^2 - 1 - \pi^2 = 0$. Dále $F_y(0, \pi) \neq 0$, tj.

$$F_y(0, \pi) = (x\mathrm{e}^{xy} + \cos y + 2y)|_{[0,\pi]} = -1 + 2\pi \neq 0.$$

Podle věty 7.2 je rovnicí $\mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 - 1 - \pi^2 = 0$ v okolí bodu $[0, \pi]$ implicitně dána funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů a platí pro ni $f(0) = \pi$.
Derivaci y' si spočteme dvěma způsoby:
1. y' vypočítáme dosazením do vzorce (7.1). Budeme potřebovat parciální derivace funkce F podle proměnné x a y v bodě $[0, \pi]$,

$$F_x(0, \pi) = (y\mathrm{e}^{xy})|_{[0,\pi]} = \pi, \quad F_y(0, \pi) = (x\mathrm{e}^{xy} + \cos y + 2y)|_{[0,\pi]} = -1 + 2\pi.$$

Dosadit do vzorce (7.1) dostáváme

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy} + \cos y + 2y} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\frac{\pi}{-1 + 2\pi}.$$

2. Totéž můžeme získat pomocí derivace složené funkce, tj. v rovnici $\mathrm{e}^{xy} + \sin y + y^2 = 1 + \pi^2$ bereme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Pak dostáváme

$$y\mathrm{e}^{xy} + xy'\mathrm{e}^{xy} + y' \cos y + 2yy' = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme y',

$$y' = \frac{-y\mathrm{e}^{xy}}{x\mathrm{e}^{xy} + \cos y + 2y},$$

dosadíme bod $[0, \pi]$ a dostáváme

$$y'(0) = -\frac{\pi}{-1 + 2\pi}.$$

Příklad 7.10. Ověřte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ zadává v bodě $[-2, 1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Vypočítejte její první a druhou derivaci a napište Taylorův polynom $T_2(x)$ se středem v bodě -2.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^2 + xy^2 - y^2 - 1$, $[x_0, y_0] = [-2, 1]$. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Jelikož $F(-2, 1) = (-2)^2 - 2 - 1 - 1 = 0$ a

$$F_y(x, y) = 2xy - 2y \quad \Rightarrow \quad F_y(-2, 1) = -6 \neq 0,$$

jsou předpoklady věty 7.2 splněny. Rovnicí $x^2 + xy^2 - y^2 - 1 = 0$ je v okolí bodu $[-2, 1]$ určena implicitně funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů, pro niž platí, že $f(-2) = 1$. Protože

$$F_x(x, y) = 2x + y^2 \quad \Rightarrow \quad F_x(-2, 1) = -3,$$

je podle (7.1)

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x + y^2}{2xy - 2y} \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = -\frac{1}{2}.$$

Druhou derivaci $y''(x)$ spočteme podle věty 7.4 derivováním první derivace a dostaneme

$$\begin{aligned}
y'' &= (y')' = \left(-\frac{2x + y^2}{2xy - 2y}\right)' = \\
&= -\frac{(2 + 2yy')(2xy - 2y) - (2x + y^2)(2y + 2xy' - 2y')}{(2xy - 2y)^2} = \\
&= -\frac{(2 - 2y\frac{2x+y^2}{2xy-2y})(2xy - 2y) - (2x + y^2)(2y - 2x\frac{2x+y^2}{2xy-2y} + 2\frac{2x+y^2}{2xy-2y})}{(2xy - 2y)^2} = \\
&= -\frac{-4y^2 - 3y^4 + 4x^2}{y(2xy - 2y)^2}.
\end{aligned}$$

Hodnota druhé derivace $y''(x)$ v bodě -2 je

$$y''(-2) = f''(-2) = -\frac{-4 - 3 + 4(-2)^2}{(2(-2) - 2)^2} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}.$$

Jelikož jsme spočetli první i druhou derivaci, můžeme funkci $y = f(x)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $x_0 = -2$. Taylorův polynom $T_2(x)$ má tvar

$$T_2(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{1}{2}f''(-2)(x+2)^2,$$

tudíž

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2.$$

Příklad 7.11. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ zadává v bodě $[\pi, \pi]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a najděte rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[\pi, \pi]$.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x, y) = y - \frac{1}{2}\sin y - x$ a pro $[x_0, y_0] = [\pi, \pi]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Platí $F(\pi, \pi) = \pi - \frac{1}{2}\sin\pi - \pi = \pi - 0 - \pi = 0$ a

$$F_y(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_y(\pi, \pi) = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnicí $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ je v okolí bodu $[\pi, \pi]$ určena implicitně právě jedna funkce $y = f(x)$ pro niž platí $f(\pi) = \pi$. Hledáme tečnu k implicitně dané funkci. Budeme vycházet z rovnice tečny t ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0 = f(x_0)]$, tj. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dosadíme do rovnice za f' vzorec (7.1) a dostáváme

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Parciální derivaci F_y již spočtenou máme, dopočteme parciální derivaci F_x

$$F_x(x, y) = -1 \quad \Rightarrow \quad F_x(\pi, \pi) = -1.$$

Derivace f' v bodě $x = \pi$ je

$$f'(\pi) = -\frac{F_x(\pi, \pi)}{F_y(\pi, \pi)} = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Rovnice tečny t je

$$y - \pi = \frac{2}{3}(x - \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3}\pi = 0.$$

Normála n je přímka kolmá k tečně, využijeme faktu, že směrový vektor tečny je stejný jako normálový vektor normály. V našem případě je normálový vektor tečny $\mathbf{n}_t = (\frac{2}{3}, -1)$, směrový vektor tečny $\mathbf{s}_t = (1, \frac{2}{3})$ je totožný s normálovým vektorem normály n. Tudíž rovnice normály n je daná rovnicí $x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}\pi = 0$.

Poznámka 7.12. Hodnota $-\frac{5}{3}\pi$ se dopočte dosazením normálového vektoru normály $\mathbf{n}_n = (1, \frac{2}{3})$ a bodu $[\pi, \pi]$ do obecné rovnice přímky v rovině.

Příklad 7.13. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ zadává v bodě $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Rozhodněte, zda graf této funkce dané implicitně leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x, y) = y - \frac{1}{2}\sin y - x$ a pro $[x_0, y_0] = [\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkce F má spojité parciální derivace v $\mathbb{R}^2$. Platí $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi-1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi-1}{2} = 0$ a

$$F_y(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_y\left(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ určuje implicitně právě jednu funkci $y = f(x)$ mající derivace všech řádů takovou, že $f(\frac{\pi-1}{2}) = \frac{\pi}{2}$. K tomu, abychom určili, zda bod $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ leží pod nebo nad tečnou, musíme spočíst druhou derivaci podle x. Budeme určovat, zda implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konvexní nebo konkávní. Derivujeme-li rovnici $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ podle x (připomeňme si, že uvažujeme y jako funkci proměnné x), dostáváme

$$y' - \frac{1}{2}y'\cos y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi-1}{2}\right) = 1.$$

Dalším derivováním podle x (s využitím věty 7.4) obdržíme

$$y'' - \frac{1}{2}y''\cos y + \frac{1}{2}(y')^2\sin y = 0$$

a odtud

$$y'' = \frac{-\frac{1}{2}(y')^2\sin y}{1 - \frac{1}{2}\cos y}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu bod $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dostaneme $y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$. To znamená, že křivka leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou, neboť implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konkávní (druhá derivace v daném bodě je záporná).

Příklad 7.14. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci 7.2 a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Označme $F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y$. Hledáme body, které vyhovují rovnici $F(x_0, y_0) = 0$ a platí pro ně $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom z věty 7.2 vyplývá, že v okolí každého takového bodu je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena jediná implicitní funkce $y = f(x)$. Dále požadujeme, aby x_0 byl stacionárním bodem této funkce, tedy aby

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x(x_0, y_0) = 0.$$

Hledané body získáme vyřešením soustavy rovnic $F(x, y) = 0$ a $F_x(x, y) = 0$. V našem případě tedy

$$F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y = 0 \quad \text{a} \quad F_x(x, y) = -2x - 2y = 0.$$

Z druhé rovnice máme $y = -x$. Dosazením $y = -x$ do první rovnice dostáváme $x(2x-1) = 0$ a odtud $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Máme dva stacionární body: $P = [0, 0]$, $Q = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Nyní musíme ověřit, zda v těchto bodech platí $F_y(x, y) \neq 0$. Spočteme $F_y(x, y) = 2y - 2x + 1$ a dosadíme body P, Q, tj.

$$F_y(P) = 1 \neq 0, \quad F_y(Q) = 3 \neq 0.$$

Jak v okolí bodu P, tak v okolí bodu Q je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena implicitně funkce jedné proměnné $f_1(x)$, resp. $f_2(x)$.
Abychom mohli extrémy v nalezených bodech určit, musíme spočíst druhé derivace implicitně dané funkce. Derivace spočteme pomocí věty 7.4, tj. Derivujeme zadanou rovnici podruhé podle x,

$$((1 - 2x + 2y)y' = 2x + 2y)' \Rightarrow (-2 + 2y')y' + (1 - 2x + 2y)y'' = 2 + 2y'.$$

Odtud

$$y'' = \frac{2 + 4y' - 2(y')^2}{1 - 2x + 2y}.$$

Postupně dosadíme stacionární body P, Q do y'':

$$f_1''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimum},$$

$$f_2''(\frac{1}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum}.$$

Funkce $f_1(x)$ má v bodě 0 lokální minimum a funkce $f_2(x)$ má v bodě $\frac{1}{2}$ lokální maximum.

Příklad 7.15. Ověřte, že rovnice $\ln x^2z^3 = \mathrm{e}^{z\cos y} - 1$ zadává v okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace prvního řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$.

Řešení. Pro $F(x, y, z) = \ln x^2z^3 - \mathrm{e}^{z\cos y} + 1$ a bod $[x_0, y_0, z_0] = [-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 7.6. Platí

$$F\left(-1, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \ln 1 - \mathrm{e}^0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Dále

$$F_z(x, y, z) = \frac{3}{z} - \mathrm{e}^{z\cos y}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_z(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 3 \neq 0.$$

Rovnicí $\ln x^2z^3 - \mathrm{e}^{z\cos y} + 1 = 0$ je v okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadána funkce $z = f(x, y)$ taková, že $f(-1, \frac{\pi}{2}) = 1$. Parciální derivace z_x, z_y vypočteme ze vzorce (7.2), tj.

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{z} - \mathrm{e}^{z\cos y}\cos y} \quad \Rightarrow \quad z_x\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\mathrm{e}^{z\cos y} z\sin y}{\frac{3}{z} - \mathrm{e}^{z\cos y}\cos y} \quad \Rightarrow \quad z_y\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Totéž můžeme spočíst i jiným způsobem. Budeme hledat z_x, z_y podle níže popsaného postupu. Nejdříve spočteme z_x, tj. v rovnici $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat y jako konstantu a z bude funkcí x, y. Rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme derivaci z_x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z_y jen s tím rozdílem, že v rovnici $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat proměnnou x jako konstantu a rovnici derivujeme podle y.

$$(\ln x^2z^3)_x = (\mathrm{e}^{z\cos y} - 1)_x \Rightarrow \frac{2xz^3}{x^2z^3} + \frac{3x^2z^2z_x}{x^2z^3} = \mathrm{e}^{z\cos y}z_x\cos y.$$

Odtud vyjádříme z_x,

$$z_x = \frac{\frac{2}{x}}{e^{z\cos y} - \frac{3}{z}}.$$

$$(\ln x^2z^3)_y = (e^{z\cos y} - 1)_y \;\Rightarrow\; \frac{3x^2z^2z_y}{x^2z^3} = e^{z\cos y}z_y\cos y - e^{z\cos y}z\sin y.$$

Odtud vyjádříme z_y,

$$z_y = \frac{-e^{z\cos y}z\sin y}{\frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y}.$$

Příklad 7.16. Ověřte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ zadává v okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a vypočítejte první a druhé parciální derivace této funkce f v daném bodě.

Řešení. Označme $F(x, y, z) = z+e^z-xy-2$, $[x_0, y_0, z_0] = [-1, 1, 0]$. Ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 7.6. Je $F(-1, 1, 0) = 0 + e^0 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$. Dále

$$F_z(x, y, z) = 1 + e^z \quad\Rightarrow\quad F_z(-1, 1, 0) = 2 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.6 jsou splněny a rovnice $z + e^z - xy - 2$ v okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadává právě jednu funkci $z = f(x, y)$ pro niž platí $f(-1, 1) = 0$. Protože funkce F má spojité parciální derivace libovolného řádu, platí totéž podle věty 7.7 i pro funkci f. Nejdříve budeme počítat parciální derivace prvního řádu, tj. z_x, z_y, podle vzorce (7.2). Tedy

$$z_x(-1, 1) = f_x(-1, 1) = -\frac{F_x}{F_z}\bigg|_{[-1,1,0]} = -\frac{-y}{1 + e^z}\bigg|_{[-1,1,0]} = \frac{1}{2}.$$

$$z_y(-1, 1) = f_y(-1, 1) = -\frac{F_y}{F_z}\bigg|_{[-1,1,0]} = -\frac{-x}{1 + e^z}\bigg|_{[-1,1,0]} = -\frac{1}{2}.$$

Alternativně můžeme první derivaci podle x resp. y spočíst derivací rovnice $F(x, y, z) = 0$ podle x resp. y. Při derivaci rovnice podle x uvažujeme, že z je funkce dvou proměnných x, y a y považujeme za konstantu, tj.

$$(z + e^z)_x = (xy + 2)_x \;\Rightarrow z_x + e^z z_x = y \;\Rightarrow z_x = \frac{y}{1 + e^z},$$

dosadíme bod $[-1, 1]$ a máme $z_x(-1, 1) = \frac{1}{2}$. Stejný postup platí pro derivaci rovnice podle y s tím rozdílem, že nyní za konstantu budeme uvažovat proměnnou x, tj.

$$(z + e^z)_y = (xy + 2)_y \;\Rightarrow z_y + e^z z_y = x \;\Rightarrow z_y = \frac{x}{1 + e^z}$$

a v bodě $[-1,1]$ dostáváme hodnotu $z_y(-1,1) = -\frac{1}{2}$.
Nyní zbývá spočíst druhé derivace, tedy z_{xx}, z_{xy} a z_{yy}. Podle věty 7.7 k jejich výpočtu využijeme již spočtené první derivace a budeme je derivovat ještě jednou buď podle x nebo podle y. Mějme na paměti, že uvažujeme z jako funkci dvou proměnných x, y. Při derivaci podle x vystupuje y jako konstanta a obráceně. Nejdříve vypočítáme derivaci z_{xx}, tj. derivujeme z_x podle x,

$$(z_x + \mathrm{e}^z z_x)_x = y_x \ \Rightarrow z_{xx} + \mathrm{e}^z (z_x)^2 + \mathrm{e}^z z_{xx} = 0 \ \Rightarrow z_{xx} = -\frac{\mathrm{e}^z (z_x)^2}{1+\mathrm{e}^z}.$$

Hodnota z_{xx} v bodě $[-1,1]$ je $z_{xx}(-1,1) = -\frac{1}{8}$.
Dále počítáme derivaci z_{xy}, tj. derivujeme z_x podle y,

$$(z_x + \mathrm{e}^z z_x)_y = y_y \ \Rightarrow z_{xy} + \mathrm{e}^z z_y z_x + \mathrm{e}^z z_{xy} = 1 \ \Rightarrow z_{xy} = \frac{1 - \mathrm{e}^z z_y z_x}{1+\mathrm{e}^z}.$$

Hodnota z_{xy} v bodě $[-1,1]$ je $z_{xy}(-1,1) = \frac{5}{8}$.
Zbývá spočíst derivaci z_{yy}, tj. derivujeme z_y podle y,

$$(z_y + \mathrm{e}^z z_y)_y = x_y \ \Rightarrow z_{yy} + \mathrm{e}^z (z_y)^2 + \mathrm{e}^z z_{yy} = 0 \ \Rightarrow z_{yy} = -\frac{\mathrm{e}^z (z_y)^2}{1+\mathrm{e}^z}.$$

Hodnota z_{yy} v bodě $[-1,1]$ je $z_{yy}(-1,1) = -\frac{1}{8}$.
S ohledem na Schwarzovu větu není potřeba počítat derivaci z_{yx}.

Jelikož jsme spočetli první i druhé parciální derivace, můžeme funkci $z = f(x,y)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $[x_0,y_0] = [-1,1]$. Taylorův polynom $T_2(x,y)$ má tvar

$$T_2(x,y) = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x-1) + f_y(-1,1)(y-1) +$$

$$+\frac{1}{2}[f_{xx}(-1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(-1,1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(-1,1)(y-1)^2],$$

tudíž

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{5}{4}(x+1)(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Příklad 7.17. Ověřte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ zadává v okolí bodu $[1,2,3]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x,y)$, a najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v tomto bodě.

Řešení. Pro funkci $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xyz-20$ a $[x_0,y_0,z_0] = [1,2,3]$ ověříme předpoklady věty 7.6. Platí $F(1,2,3) = 1+4+9+6-20 = 0$. Dále

$$F_z(x,y,z) = 2z + xy \quad \Rightarrow \quad F_z(1,2,3) = 8 \neq 0.$$

Rovnice $x^2+y^2+z^2+xyz-20 = 0$ v okolí bodu $[1,2,3]$ implicitně zadává právě jednu funkci $z = f(x,y)$ takovou, že $f(1,2) = 3$. Rovnice tečné roviny k funkci $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Určíme parciální derivace funkce z derivováním funkce $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xyz-20$ podle x, y a podle z pomocí vztahu (7.2), tj.

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x+yz}{2z+xy}, \;\; z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y+xz}{2z+xy}.$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $[1,2]$ tedy jsou

$$z_x(1,2) = f_x(1,2) = -\frac{2x+yz}{2z+xy}\bigg|_{[1,2,3]} = -1,$$

$$z_y(1,2) = f_y(1,2) = -\frac{2y+xz}{2z+xy}\bigg|_{[1,2,3]} = -\frac{7}{8}.$$

Vypočtené hodnoty derivací v bodě $[1,2]$ dosadíme do vzorce pro tečnou rovinu a získáváme

$$z - 3 = -(x-1) - \frac{7}{8}(y-2),$$

po úpravě

$$x + \frac{7}{8}y + z - \frac{23}{4} = 0.$$

7.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 7.1. Ověřte, že rovnice $xy\ln(x+y)=0$ zadává v okolí bodu $[2,-1]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$, a vypočítejte y' této funkce y v daném bodě $[2,-1]$.

Cvičení 7.2. Ověřte, že rovnice $\mathrm{e}^{\sin x^2}+\mathrm{e}^{\sin xy}-2y=2$ zadává v okolí bodu $[0,0]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$. V bodě $[0,0]$ vypočítejte její první derivaci.

Cvičení 7.3. Ověřte, že rovnice $\sin xy+\cos xy=-1$ zadává v okolí bodu $[1,\pi]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$. Vypočítejte jeí první a druhou derivaci a napište její Taylorův polynom $T_2(x)$ se středem v bodě 1.

Cvičení 7.4. Ověřte, že rovnice $\mathrm{e}^{\cos x}+\sin y^2+x^2y^3+y-1=0$ zadává v okolí bodu $[\frac{\pi}{2},0]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$. Vypočítejte její první.

Cvičení 7.5. Ověřte, že rovnice $xy+\ln y-1=0$ zadává v okolí bodu $[1,1]$ implicitně jedinou funkci $y=f(x)$, a napište rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[1,1]$.

Cvičení 7.6. K rovnici $x^2+2y^2-2xy+2x+1=0$ najděte body, v nichž jsou splněny všechny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definované funkce jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Cvičení 7.7. Ověřte, že rovnice $\frac{z-x}{y}+\ln(z^2-3)+\frac{1}{3}=0$ zadává v okolí bodu $[1,-3,2]$ implicitně jedinou funkci $z=f(x,y)$. Vypočtěte první parciální derivace této funkce z a určete její hodnotu v bodě $[1,-3,2]$.

Cvičení 7.8. Ověřte, že rovnice $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z-5x=0$ zadává v okolí bodu $[0,0,0]$ implicitně jedinou funkci $z=f(x,y)$. Spočtěte její první parciální derivace.

Cvičení 7.9. Ověřte, že rovnice $y^{\frac{z}{x}}-2=0$ zadává v okolí bodu $[1,2,1]$ implicitně jedinou funkci $z=f(x,y)$. Spočtěte její první a druhé parciální derivace a napište Taylorův polynom $T_2(x,y)(1,2)$.

Cvičení 7.10. Ověřte, že rovnice $2z+z^2-x^4+2x^2y+xy+y^2-7=0$ zadává v okolí bodu $[1,0,2]$ implicitně jedinou funkci $z=f(x,y)$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu této funkce z v bodě $[1,0,2]$.

8 Lokální extrémy funkcí n proměnných

8.1 Definice a věty

Definice 8.1. **Kvadratickou formou n proměnných** nazýváme polynom druhého stupně n argumentů, který lze psát v následujícím tvaru

$$\Phi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde $a_{ij} = a_{ji}$.

Definice 8.2. Kvadratická forma n proměnných se nazývá

- **kladně definitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze kladných hodnot;
- **záporně definitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze záporných hodnot;
- **kladně semidefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze nezáporných hodnot;
- **záporně semidefinitní**, jestliže v bodech různých od počátku nabývá pouze nekladných hodnot;
- **indefinitní**, jestliže v některých bodech různých od počátku nabývá kladných hodnot, zatímco v jiných bodech různých od počátku nabývá záporných hodnot.

Věta 8.3. *Nechť D_1, D_2,..., D_n jsou základní hlavní minory determinantu D kvadratické formy Φ. Pak je tato forma*

- *kladně definitní, právě když jsou všechny její základní hlavní minory kladné;*
- *záporně definitní, právě když je kvadratická forma $-\Phi$ kladně definitní.*

Definice 8.4. Říkáme, že funkce n proměnných $f(x_1, \dots x_n)$ má v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ svého definičního oboru **lokální maximum**, popř. **lokální minimum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*) \subseteq \mathcal{D}f$ takové, že platí

$$f(x) \leq f(x^*), \qquad \text{popř.} \qquad f(x) \geq f(x^*)$$

pro každý bod $x \in \mathcal{O}(x^*)$. Jsou-li uvedené nerovnosti splněny pro $x \neq x^*$ ostře, hovoříme o **ostrém** lokálním maximu, popř. minimu.

Souhrnně nazýváme maximální a minimální hodnoty funkce f jejími **extremálními hodnotami**, stručně jen extrémy.

Věta 8.5. *(Fermatova) Předpokládejme, že funkce $f(x_1, \dots x_n)$ má lokální extrém v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ a že v bodě x^* existuje parciální derivace funkce f podle proměnné x_i, $1 \leq i \leq n$. Pak platí*

$$f_{x_i}(x^*) = 0.$$

Definice 8.6. Bod x^*, ve kterém jsou všechny parciální derivace prvního řádu funkce n nulové, nazýváme **stacionárním bodem** funkce f.

Důsledek 8.7. *Nechť má funkce f v bodě x^*, ve kterém existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f, lokální extrém. Pak x^* je stacionárním bodem funkce f.*

Věta 8.8. *Nechť $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ je stacionární bod funkce, v jehož okolí má funkce f spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Uvažujme kvadratickou formu Φ, kterou představuje diferenciál druhého řádu funkce f v bodě x^*, tj. kvadratickou formu tvaru*

$$\mathrm{d}^2 f(x^*) = (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^2 f(x^*) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n).$$

V bodě x^* nastává lokální extrém, a to

- *ostré lokální maximum, je-li Φ záporně definitní forma,*
- *ostré lokální minimum, je-li Φ kladně definitní forma.*

Je-li Φ indefinitní forma, pak v bodě x^* lokální extrém nenastává.

8.2 Řešené příklady

Příklad 8.9. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2+y^2-3x+2y+18$.

Řešení. Nejprve je nutné nají stacionární body funkce f. Vypočteme tedy parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule. Dostáváme

$$f_x(x, y) = 2x - 3 \qquad \text{a} \qquad f_y(x, y) = 2y + 2.$$

Tyto parciální derivace jsou rovny 0, jestliže $x = 1,5$ a $y = -1$. To znamená, že vyšetřovaná funkce má pouze jeden stacionární bod. K tomu, abychom zjistili, zda se jedná o lokální maximum či minimum, potřebujeme znát parciální derivace druhého řádu. Snadno vidíme, že

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 2 \qquad \text{a} \qquad f_{xy} = 0.$$

Ze vztahů $f_{xx} = 2 > 0$ a $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 > 0$ vyplývá, že se jedná o bod lokálního minima.

V předcházejícím postupu nebylo nutné využít parciálních derivací druhého řádu. Zadaná funkce má jednoduchý tvar a je možné ji následovně upravit

$$f(x, y) = (x - 1,5)^2 + (y + 1)^2 + 14,75.$$

Nyní díky nerovnostem $(x - 1,5^2) \geq 0$ a $(y + 1)^2 \geq 0$ snadno nahlédneme, že $f(x, y) \geq 14(\frac{3}{4})$ pro libovolné hodnoty proměnných x a y. Bod [1,5,-1] je tedy skutečně lokálním minimem zkoumané funkce.

Příklad 8.10. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$.

Řešení. Budeme postupovat obvyklým způsobem, který spočívá v nalezení stacionárních bodů pomocí parciálních derivací. Dostáváme

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6y \qquad \text{a} \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - 6x.$$

Ze vztahu $x^2 - 2y = 0$ dostáváme $y = \frac{x^2}{2}$ a po dosazení za y do rovnice $3y^2 - 6x = 0$ obdržíme rovnici

$$\frac{3}{4}x(x^3 - 8) = 0.$$

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y-ové souřadnice stacionárních bodů, dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0, 0], B_2 = [2, 2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6 \qquad \text{a} \qquad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0.0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2, 2) \cdot f_{yy}(2, 2) - [f_{xy}(2, 2)]^2 = 108 > 0$ a $f_{xx}(2, 2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x, y)$.

Příklad 8.11. Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací finkce $f(x, y, z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \qquad f_y = 3y^2 - 3x \qquad \text{a} \qquad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y - z &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \\ z^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$\begin{aligned} y^4 - y - z &= 0 \\ z^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$.

Uvažujme nejprve případ $z = y$. Dosadíme-li za z do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme

$$y(y^3 - 2) = 0.$$

Z obdrženého vztahu vyplývá, že $y_1 = 0$ nebo $y_2 = \sqrt[3]{2}$. Dále ihned vidíme že těmto hodnotám odpovídají hodnoty proměnné z ve tvaru $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$.

Z rovnosti $x = z^2$ pak vypočteme $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{4}$. Obdrželi jsme tedy dva stacionární body

$$B_1 = [0, 0, 0] \quad \text{a} \quad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}].$$

Vyšetříme-li nyní případ $z = -y$, dostáváme po dosazení za proměnnou z do rovnice $y^4 - y - z = 0$ rovnost $y^4 = 0$, což nám dává kořen $y_3 = 0$. Pak ale také $z_3 = 0$ a $x_3 = 0$. V tomto případě jsme tedy neobdrželi žádný další stacionární bod, který by byl různý od bodů B_1 a B_2.

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řádu, pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1 = [0, 0, 0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x, y, z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0, D_2 = 36 \cdot 2 - 9 > 0, D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[3]{2} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x, y, z)$.

Příklad 8.12. Najděte nejkratší vzdálenost bodu $B = [1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

Řešení. Vzdálenost libovolného bodu $[x, y, z]$ od bodu $B = [1, 1, 1]$ je dána vztahem

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}.$$

Pokud ovšem bod $[x, y, z]$ leží v rovině $3x + y + z = 2$, můžeme vyjádřit některou z proměnných x, y, z pomocí zbylých dvou. Máme tedy například $z = 2 - 3x - y$, což znamená, že je zapotřebí najít extrémní hodnoty funkce

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (1-3x-y)^2}.$$

Užitečným trikem, který se při minimalizaci vzdálenosti používá, je umocnění funkčního vztahu, čímž odstraníme odmocninu a zjednodušíme tak vztahy, které obdržíme při výpočtu parciálních derivací minimalizované funkce. Budeme tedy hledat extrém funkce.

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (1-3x-y)^2.$$

Dostáváme

$$f_x = 2(x-1) - 2(1-3x-y).(+3) = 20x + 6y - 8$$

,

$$f_y = 2(y-1) - 2(1-3x-y) = 4y + 6x - 4$$

. Vídíme, že funkce d^2 má jediný kritický bod

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{44} = \frac{2}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 8 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{32}{44} = \frac{8}{11}.$$

Z povahy úlohy vyplývá, že nalezený bod $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}]$ je bodem lokálního i globálního minima funkce d^2, protože v rovině $3x + y + z = 2$ musí ležet bod, který je nejbíž k bodu $B = [1, 1, 1]$. Tyto úvahy už jen formálně potvrďme výpočtem, kdy ze vztahů $f_{xx} = 20$, $f_{yy} = 4$, $f_{xy} = 6$ vyplývá

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 44 > 0,$$

a to znamená, že bod $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}]$ je skutečně bodem lokálního minima zkoumané funkce. Zbývá určit hodnotu nejkratší vzdálenosti bodu $B = [1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + 2 = 2$. Je dána vztahem

$$d = \sqrt{\left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{3}{11}\right)^2 + \left(1 - \frac{6}{11} - \frac{8}{11}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

Příklad 8.13. Obdélníková dřevěná bedna bez víka má objem $C\mathrm{dm}^3$, kde C je kladná konstanta. Jaké mají být rozměry bedny, jestliže chceme minimalizovat spotřebu dřeva potřebného k její výrobě. Při výpočtu zanedbejte tloušťku stěn bedny.

Řešení. Označíme-li délky jednotlivých stran bedny pomocí proměnných x, y a z, pak je objem bedny dán vztahem

$$V = xyz = C.$$

Naším úkolem je minimalizovat plochu stěn bedny, přičemž celkový obsah je dán vztahem

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

Obsah minimalizované plochy je tedy obecně funkcí tří proměnných. Využijeme-li ale skutečnosti, že $z = \frac{C}{xy}$, můžeme náš problém redukovat na hledání extrému funkce dvou proměnných tvaru

$$S = xy + \frac{2xC}{xy} + \frac{2yC}{xy} = xy + \frac{2C}{y} + \frac{2C}{x}.$$

Parciální derivace funkce S podle proměnných x a y mají tvar

$$S_x(x, y) = y - \frac{2C}{x^2} \qquad \text{a} \qquad S_y(x, y) = x - \frac{2C}{y^2}$$

a jsou rovny nule, jestliže

$$y = \frac{2C}{x^2} \qquad \text{a} \qquad x = \frac{2C}{y^2}, \qquad \text{neboli} \qquad yx^2 = 2C = xy^2.$$

Z posledního vztahu dostáváme rovnici $xy(x-y)=0$, jejímž řešením je vzhledem k požadavku nenulovosti proměnných bod, pro který platí $x=y$. Odtud dále dostáváme $x=y=\sqrt[3]{2C}$. Z povahy úlohy a ze skutečnosti, že funkce S má pouze jediný stacionární bod, vyplývá, že bod $[\sqrt[3]{2C},\sqrt[3]{2C}]$ je bodem lokálního minima funkce S. Podotýkáme ještě, že třetí rozměr z je dán vztahem $z=\frac{\sqrt[3]{2C}}{2}$.

8.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 8.1. Najděte všechny body grafu funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5$, v nichž je tečná rovina funkce rovnoběžná s rovinou xy.

Cvičení 8.2. Najděte všechny body grafu funkce, která je daná vztahem $f(x, y) = 3x^2 + 12x + 4y^3 - 6y^2 + 5$, v nichž je tečná rovina funkce rovnoběžná s rovinou xy.

Cvičení 8.3. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 7$.

Cvičení 8.4. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x} \cos y$.

Cvičení 8.5. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = 2x \sin y$.

Cvičení 8.6. Vyšetřete stacionární body funkce $f(x, y) = (4 - x - y)xy$.

Cvičení 8.7. Najděte taková tři kladná čísla, jejichž součet je roven 51, aby jejich součin byl maximální.

Cvičení 8.8. Najděte bod ležící v rovině $x + 2y + 3z = 4$, který je nejbližší k počátku.

Cvičení 8.9. Najděte všechny body na ploše dané vztahem $xyz = 8$, které mají nejkratší vzdálenost od počátku.

Cvičení 8.10. Krabice ve tvaru kvádru má mít objem $20\,\mathrm{dm}^3$, přičemž materiál určený k výrobě bočních stěn stojí 10 Kč na dm^2, materiál určený k výrobě dna stojí 20 Kč na dm^2 a materiál určený k výrobě víka stojí 30 Kč na dm^2. Navrhněte rozměry krabice tak, aby náklady na její výrobu byly minimální.

9 Vázané extrémy

9.1 Definice a věty

Definice 9.1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $1 \leq m < n$, jsou funkce. Položme $M = \{x \in \mathbb{R}^n; g_1(x) = 0 \wedge \dots \wedge g_m(x) = 0\}$. Nechť $M \subset \mathcal{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$. Existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M$ platí $f(x) \geq f(x^*)$, říkáme, že funkce f má v bodě x^* **lokální vázané minimum**. Řekneme, že funkce f má v bodě $x^* \in M$ **lokální vázané maximum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M$ platí $f(x) \leq f(x^*)$. Lokální vázaná minima a maxima funkce f se nazývají **lokální vázané extrémy**.

Věta 9.2. *Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \dots, g_m$, $1 \leq m < n$, mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny U má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

hodnost m. Buď M množina všech bodů $x = [x_1, \dots, x_n]$, které vyhovují vazebným rovnicím $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$. Má-li funkce f v bodě $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$ lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{9.2}$$

Označme matici (9.1) jako matici G. Matice G je tvořena vektory parciálních derivací funkce g_k, tj. g_k', $k = 1, \dots, m$.

Věta 9.3. *Nechť funkce $f, g_1, \dots, g_m$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné v bodě x^*, který je stacionárním bodem funkce f na M a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory, tj. $L'(x, \lambda) = 0$. Dále nechť matice (9.1) má v bodě x^* hodnost m. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku*

$$\langle G(x^*), h \rangle = 0 \tag{9.3}$$

platí

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle > 0, \tag{9.4}$$

má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum vzhledem k M. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku (9.3) platí

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle < 0, \tag{9.5}$$

má funkce f v bodě x^* ostré lokální maximum vzhledem k M.

Na základě věty 9.2 a věty 9.3 zformulujeme návod, jak postupovat při hledání vázaných extrémů funkcí se spojitými druhými derivacemi:
1) Zapíšeme vazebné rovnice ve tvaru $g_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, m$ a určíme hodnost matice G.
2) Vytvoříme Lagrangeovu funkci L a určíme stacionární body funkce f vzhledem k M.
3) Spočteme druhou derivaci Lagrangeovy fukce L ve stacionárních bodech.
4) Určíme $h \in \mathbb{R}^n$.
5) Vyšetříme definitnost kvadratické formy $\langle L''(x^*)h, h\rangle$.

9.2 Řešené příklady

Příklad 9.4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ na množině M určené rovností $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = (x-1)^2+(y-2)^2-1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x-2, 2y-4)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že

$$2x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad 2y - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2.$$

Bod $[1, 2]$ však nevyhovuje vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 4x + 3y - 4 + \lambda((x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x &= 4 + 2\lambda(x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = -\frac{2}{\lambda} \\ L_y &= 3 + 2\lambda(y - 2) = 0 \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Dosazením vyjádřených hodnot $x-1$, $y-2$ do rovnice vazby dostáváme

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}.$$

Pro $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$ dopočítáme $x_1 = \frac{9}{5}$, $y_1 = \frac{13}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$. Pro $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ dopočítáme $x_2 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{7}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x_1^* = [\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = \left\langle \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right), (h_1, h_2)\right\rangle = \frac{8}{5}h_1 + \frac{6}{5}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{3}{4}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{3}{4}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = \left(-\frac{3}{4}t, t\right) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = -\frac{125}{16}t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální maximum.
Podobně pro bod $x_2^* = [\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ a

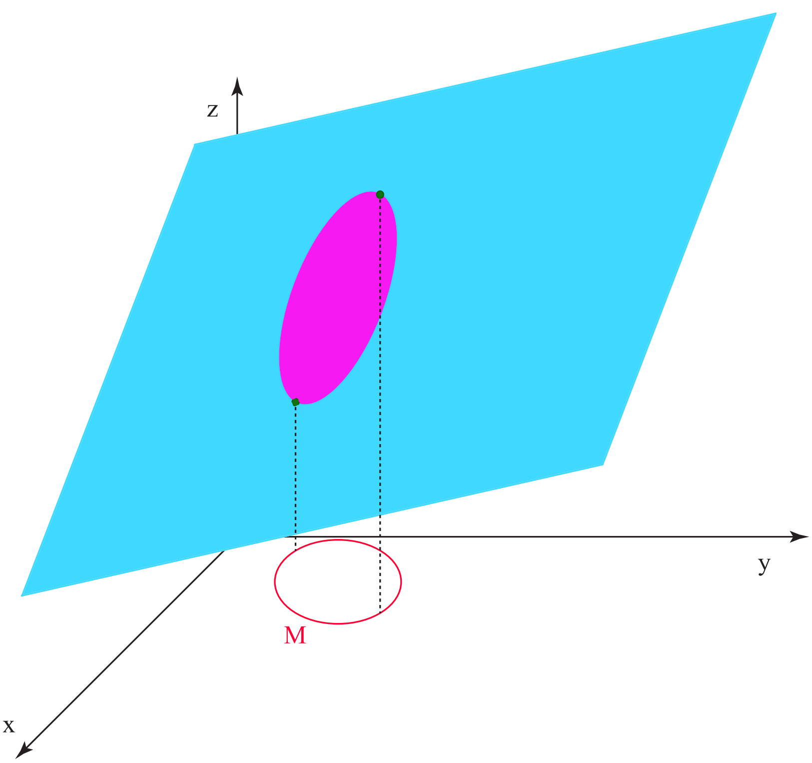
$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \left\langle \left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right), (h_1, h_2)\right\rangle = -\frac{8}{5}h_1 - \frac{6}{5}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -\frac{3}{4}h_2,$$

tj. $h = \left(-\frac{3}{4}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = \left(-\frac{3}{4}t, t\right) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{125}{16}t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Vysvětleme si geometrický význam úlohy. Grafem funkce $f(x, y) = 4x+3y-4$

je rovina. Vazebná rovnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ je rovnice kružnice se středem v bodě $S = [1, 2]$, poloměrem $r = 1$ ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy v bodech kružnice. z-ové souřadnice těchto bodů, tj. funkční hodnoty odpovídající bodům kružnice, leží na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na obrázku 13.



Obrázek 13: Maximum a minimum funkce f na množině M

Příklad 9.5. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ vzhledem k podmínce $x^2 = y$.

Řešení. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby.
1) Nejdříve úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = x^2 - y$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x, -1)$ má hodnost 1. Sestavíme

Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = 4\ln y - x + \lambda(x^2 - y),$$

spočteme její první parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule, tj.

$$L_x = -1 + 2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2\lambda}$$
$$L_y = \frac{4}{y} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{\lambda}.$$

Vyjádřené hodnoty x a y dosadíme do rovnice vazby, $g(x,y) = x^2 - y = 0$,

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - \frac{4}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{16}.$$

Pro $\lambda = \frac{1}{16}$ dopočítáme souřadnice $x = 8$, $y = 64$, získali jsme stacionární bod $x^* = [8, 64]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{4}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární bod $x^* = [8, 64]$ a hodnotu $\lambda = \frac{1}{16}$:

$$L''(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1024} \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x^* = [8, 64]$ dostáváme $G(x^*) = (16, -1)$ a

$$\langle G(x^*), h\rangle = \langle (16, -1)\,,\, (h_1, h_2)\rangle = 16h_1 - h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 16h_1 = h_2,$$

tj. $h = (t, 16t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle = (t, 16t) \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1024} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 16t \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x^* je podle věty 9.3 lokální maximum.

2) Úlohu můžeme také řešit jednoznačným vyjádřením proměnné y z rovnice vazby $x^2 - y = 0$. Tím získáváme $y = x^2$, které dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$, dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = 4 \ln x^2 - x.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$F'(x) = \frac{8}{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

Spočtením druhé derivace $F''(x) = -\frac{8}{x^2}$ a dosazením bodu $x = 8$ získáváme hodnotu $F''(8) = -\frac{1}{8} < 0$. Protože je druhá derivace v bodě $x = 8$ záporná, má funkce F v tomto bodě lokální maximum. Dopočítáme $y = 64$. Odtud funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ má v bodě $[8, 64]$ vázané lokální maximum.

Příklad 9.6. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit třemi způsoby.
1) Metoda Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x, 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že $x = y = 0$. Tyto hodnoty však nevyhovují vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x = 2x + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x(1 + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \ \vee \ \lambda = -1 \\ L_y = 1 + 2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2y\lambda = -1 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme nejdříve $x = 0$ a dostáváme $y = \pm 1$. Máme tedy stacionární body $x_1^* = [0, 1]$ s příslušnou hodnotou $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $x_2^* = [0, -1]$ s hodnotou $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dále do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme za $y = -\frac{1}{2\lambda}$ a $\lambda = -1$. Dostaneme $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Získali jsme další dva stacionární body $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$

pro hodnotu $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -1, \quad L''(x_3^*) = L''(x_4^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku (9.3). Nejdříve vyšetříme body $x_1^* = [0, 1]$ a $x_2^* = [0, -1]$. Dostáváme $G(x_1^*) = (0, 2) = -G(x_2^*)$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = 2h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 0, \text{ tj. } h = (t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Pro x_2^* má h splňující podmínku (9.3) stejný tvar. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = (t, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Podobně pro bod x_2^*.

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = (t, 0) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = 3t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Dále vyšetříme bod $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$. Dostáváme $G(x_3^*) = (\sqrt{3}, 1)$ a

$$\langle G(x_3^*), h\rangle = \sqrt{3}h_1 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = -\sqrt{3}h_1, \quad \text{tj. } h = \big(t, -\sqrt{3}t\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x_3^*)h, h\rangle = \big(t, -\sqrt{3}t\big) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{3}t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_3^* je podle věty 9.3 lokální maximum.
Podobně pro bod $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$. $G(x_4^*) = (-\sqrt{3}, 1)$ a

$$\langle G(x_4^*), h\rangle = \sqrt{3}h_1 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \sqrt{3}h_1, \quad \text{tj. } h = \big(t, \sqrt{3}t\big),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\langle L''(x_4^*)h, h\rangle = \begin{pmatrix} t, \sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix} = -6t^2 < 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě x_4^* je podle věty 9.3 lokální maximum.

2) Jiný způsob řešení úlohy spočívá v jednoznačném vyjádření proměnné y z vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, tj. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Úloha se tedy rozpadá na dvě části.

(1) Budeme uvažovat $y = \sqrt{1 - x^2}$. Tento vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \sqrt{1 - x^2}) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Nyní hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \ \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

postupně dosadíme stacionární body. Tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad F''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum}, \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = 1 \Rightarrow [0, 1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}, \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = \tfrac{1}{2} \Rightarrow [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}] \text{ vázané lokální maximum}, \\
x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}, \\
&\rightarrow \quad \text{dopočteme } y = \tfrac{1}{2} \Rightarrow [-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}$$

(2) Budeme uvažovat $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Vztah dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = x^2 + y$ a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, -\sqrt{1 - x^2}) = x^2 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Hledáme extrém funkce jedné proměnné $F(x)$:

$$F'(x) = 2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \ \Rightarrow x_4 = 0.$$

Do druhé derivace

$$F''(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

dosadíme za x bod $x_4 = 0$. Dostáváme $F''(0) = 1 > 0$, tedy jedná se o lokální minimum. Dopočteme $y = -1$. Odtud zadaná funkce f má v bodě $[0, -1]$ vázané lokální minimum.

3) Další možností jak úlohu řešit je pomocí parametrizace. Vazba je jednotková kružnice, tudíž můžeme pro parametrizaci použít polární souřadnice s poloměrem $r = 1$, pak $x = \cos t$, $y = \sin t$ pro $t \in (0, 2\pi]$. Polární souřadnice dosadíme do zadané funkce f a dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t.$$

Ve výpočtu pokračujeme dál jako při hledání extrémů funkce jedné proměnné.

$$F' = -2\cos t \sin t + \cos t = 0 \ \Rightarrow \cos t = 0 \ \vee \ \sin t = \frac{1}{2}.$$

Z první rovnosti $\cos t = 0$ dostáváme stacionární body $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Z druhé rovnosti $\sin t = \frac{1}{2}$ máme stacionární body $t_3 = \frac{\pi}{6}$, $t_4 = \frac{5\pi}{6}$. Tyto body nyní dosadíme do druhé derivace

$$F''(t) = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t - \sin t.$$

Tedy v bodě

$$\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_1) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum},\\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_2) = 3 > 0 \Rightarrow \text{lokální minimum},\\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum},\\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad F''(t_3) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokální maximum}.
\end{aligned}$$

Parametrizací se vrátíme zpět k proměnným x, y a dostáváme

$$
\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_1 = 0, \;\; y = \sin t_1 = 1, \\
&\Rightarrow \quad [0,1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_2 = 0, \;\; y = \sin t_2 = -1, \\
&\Rightarrow \quad [0,-1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; y = \sin t_3 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}, \\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; y = \sin t_4 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}
$$

Příklad 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x - y + 3z$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Hodnost matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (2x, 2y, 8z)$ je různá od 1 pouze v nulovém bodě, který však nevyhovuje vazebné podmínce. Píšeme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda) = x - y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$
\begin{aligned}
L_x = 1 + 2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda} \\
L_y = -1 + 2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2\lambda} \\
L_z = 3 + 8z\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = -\frac{3}{8\lambda}.
\end{aligned}
$$

Vyjádřené x, y, z dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ a dostáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$, tj. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}$. Tomu odpovídají stacionární body

$x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$, $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. Vyjádříme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body x_1^*, x_2^* a jim příslušnou hodnotu λ_1, resp. λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}, \ \ L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}, \ \ L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3).
Pro bod $x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{24}{\sqrt{17}})$ a

$$\langle G(x_1^*), h \rangle = -\frac{8}{\sqrt{17}} h_1 + \frac{8}{\sqrt{17}} h_2 - \frac{24}{\sqrt{17}} h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + 3h_3,$$

tj. $h = (t, t + 3p, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h \rangle = (t, t+3p, p) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t+3p \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{17}\, t^2 + \frac{13}{4}\sqrt{17}\, p^2 + \frac{3}{2}\sqrt{17}\, pt.$$

To je kvadratická forma kladně definitní, takže v bodě x_1^* nastává ostré lokální minimum.
Pro bod $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{24}{\sqrt{17}})$ a

$$\langle G(x_2^*), h \rangle = \frac{8}{\sqrt{17}} h_1 - \frac{8}{\sqrt{17}} h_2 + \frac{24}{\sqrt{17}} h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + 3h_3,$$

tj. $h = (t, t+3p, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = (t, t+3p, p)\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t+3p \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{17}\,t^2 - \frac{13}{4}\sqrt{17}\,p^2 - \frac{3}{2}\sqrt{17}\,pt.$$

To je kvadratická forma negativně definitní, takže v bodě x_2^* nastává ostré lokální maximum.

Příklad 9.8. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině určené rovnicemi $x - y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Příklad vyřešíme dvěma způsoby.
1) Nejprve budeme úlohu řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbami $g_1(x, y, z) = x - y + z - 1 = 0$, $g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Matice $G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ má hodnost 2. Matice nabývá hodnosti 1 pro $x = y = 0$, ale tyto hodnoty nesplňují vazební podmínku g_2. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + 2y + 3z + \lambda_1(x - y + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$L_x = 1 + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1+\lambda_1}{2\lambda_2}$$
$$L_y = 2 - \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{\lambda_1 - 2}{2\lambda_2}$$
$$L_z = 3 + \lambda_1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -3.$$

Do vyjádřených x a y dosadíme hodnotu $\lambda_1 = -3$ a získáváme, že $x = \frac{1}{\lambda_2}$, $y = -\frac{5}{2\lambda_2}$. Takto vyjádřené x, y dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 = 1$ a dostáváme $\lambda_2 = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, tj. $\lambda_{21} = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\lambda_{22} = -\frac{\sqrt{29}}{2}$. Stacionární body jsou $x_1^* = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$, $x_2^* = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body x_1^*, x_2^* a jim příslušnou hodnotu λ_{21}, resp. λ_{22}:

$$\lambda_{21} = \frac{\sqrt{29}}{2}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} \sqrt{29} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{22} = -\frac{\sqrt{29}}{2}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -\sqrt{29} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3).
Pro bod $x_1^* = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$ dostáváme $G(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & -\frac{10}{\sqrt{29}} & 0 \end{pmatrix}$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = \begin{pmatrix} h_1 - h_2 + h_3 \\ \frac{4}{\sqrt{29}}h_1 - \frac{10}{\sqrt{29}}h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{5}{2}h_2, \quad h_3 = -\frac{3}{2}h_2,$$

tj. $h = \left(\frac{5}{2}t, t, -\frac{3}{2}t\right)$, $t, \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = \left(\frac{5}{2}t, t, -\frac{3}{2}t\right) \begin{pmatrix} \sqrt{29} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t \\ t \\ -\frac{3}{2}t \end{pmatrix} = \frac{29}{4}\sqrt{29}t^2 > 0$$

pro $t \neq 0$. V bodě x_1^* nastává lokální minimum.
Pro bod $x_2^* = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$ dostáváme $G(x_2^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{10}{\sqrt{29}} & 0 \end{pmatrix}$ a

$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \begin{pmatrix} h_1 - h_2 + h_3 \\ -\frac{4}{\sqrt{29}}h_1 + \frac{10}{\sqrt{29}}h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{5}{2}h_2, \quad h_3 = -\frac{3}{2}h_2,$$

tj. $h = \left(\frac{5}{2}t, t, -\frac{3}{2}t\right)$, $t, \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = \left(\frac{5}{2}t, t, -\frac{3}{2}t\right) \begin{pmatrix} -\sqrt{29} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t \\ t \\ -\frac{3}{2}t \end{pmatrix} = -\frac{29}{4}\sqrt{29}t^2 > 0$$

pro $t \neq 0$. V bodě x_2^* nastává lokální maximum.

2) Úlohu budeme tedy řešit jiným způsobem. Jednoznačně vyjádříme proměnnou z z rovnice vazby $g_1(x, y, z) = x - y + z - 1 = 0$, tj. $z = 1 - x + y$. Tento

vztah dosadíme do zadané funkce $f(x,y,z) = x+2y+3z$ a dostaneme funkci dvou proměnných

$$F(x,y) = f(x,y,1-x+y) = x+2y+3(1-x+y) = -2x+5y+3$$

s vazbou $g(x,y) = g_2(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$. Nyní hledáme extrém funkce dvou proměnných $F(x,y)$ s vazbou $g(x,y) = 0$. Tuto úlohu budeme řešit metodou Langrangeových multiplikátorů. Matice $G = (2x, 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová v případě, že $x = y = 0$. Tyto hodnoty však nevyhovují vazebné podmínce. Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = -2x+5y+3+\lambda(x^2+y^2-1)$$

derivujeme podle proměnných x, y a derivace položíme rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x = -2+2x\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda} \\ L_y = 5+2y\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = -\frac{5}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Vyjádřené x, y dosadíme do rovnice vazby $x^2+y^2 = 1$ a získáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, tedy stacionární body $b_1 = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}]$ pro $\lambda_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $b_2 = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}]$ pro $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2}$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Do L'' dosadíme stacionární body b_1, resp. b_2 a příslušné hodnoty λ_1, resp. λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}, \quad L''(b_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{29} & 0 \\ 0 & \sqrt{29} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2}, \quad L''(b_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{29} & 0 \\ 0 & -\sqrt{29} \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2)$ splňující podmínku Pro bod $b_1 = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}]$ dostáváme $G(b_1) = (\frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{10}{\sqrt{29}})$ a

$$\langle G(b_1), h\rangle = \frac{4}{\sqrt{29}}h_1 - \frac{10}{\sqrt{29}}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{5}{2}h_2,$$

tj. $h = \left(\frac{5}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(b_1)h, h\rangle = \left(\frac{5}{2}t, t\right)\begin{pmatrix} \sqrt{29} & 0 \\ 0 & \sqrt{29} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{29}{4}\sqrt{29}t^2 > 0 \quad \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě b_1 je podle věty lokální minimum.
Dopočteme $z = 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}$. Zadaná funkce f má v bodě $[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$ vázané lokální minimum.
Podobně pro bod $b_2 = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}]$ dostáváme $G(b_2) = (-\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{10}{\sqrt{29}})$ a

$$\langle G(b_2), h\rangle = -\frac{4}{\sqrt{29}}h_1 + \frac{10}{\sqrt{29}}h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{5}{2}h_2,$$

tj. $h = \left(\frac{5}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(b_2)h, h\rangle = \left(\frac{5}{2}t, t\right)\begin{pmatrix} -\sqrt{29} & 0 \\ 0 & -\sqrt{29} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} = -\frac{29}{4}\sqrt{29}t^2 < 0 \, \text{pro } t \neq 0.$$

V bodě b_2 je podle věty lokální maximum.
Dopočteme $z = 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}$. Zadaná funkce f má v bodě $[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$ vázané lokální maximum.

9.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 9.1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 2y$ na množině určené rovností $2x - y = 1$.

Cvičení 9.2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 9x^2+16y^2-64y-36x$ na množině určené rovností $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Cvičení 9.3. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x + y)$ vzhledem k podmínce $xy = 1$.

Cvičení 9.4. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy^2$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 1$.

Cvičení 9.5. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sin(y + 1) + \cos x$ na množině určené rovností $y - x = -1$.

Cvičení 9.6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2}$ vzhledem k podmínce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

Cvičení 9.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ na množině určené rovností $xyz - 4 = 0$.

Cvičení 9.8. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině určené rovností $xy + xz + yz = 8$.

Cvičení 9.9. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xy+xz$ na množině určené rovnostmi $x^2 + y^2 = 1$, $xz = 1$.

Cvičení 9.10. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ vzhledem k podmínkám $2x + y + z = 2$, $x - y - 3z = 4$.

10 Globální extrémy

10.1 Definice a věty

Definice 10.1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathcal{D}(f)$, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in M$. Řekneme, že funkce f má v bodě x^* **globální maximum na** M, jestliže $\forall x \in M$ platí $f(x) \leq f(x^*)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě x^* **globální minimum na** M, jestliže $\forall x \in M$ platí $f(x) \geq f(x^*)$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o ostrých globálních extrémech. Místo termínu globální extrém se používá často pojem **absolutní** extrém.

Věta 10.2. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.*

Předchozí věta poskytuje návod pro nalezení globálních extrémů diferencovatelných funkcí na kompaktních množinách. Postupovat budeme následovně:
1) Najdeme stacionární body ležící uvnitř množiny M a určíme jejich funkční hodnoty. Nebudeme ověřovat, zda se jedná o lokální extrémy. Je to zbytečné a obvykle i pracné vylučovat stacionární body, v nichž extrém nenastává. Tím sice vypočteme funkční hodnoty i v nepotřebných bodech, ale ty se stejně neuplatní.
2) Vyšetříme funkci f na hranici množiny M, tj. určíme vázané extrémy funkce f. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech vázaných extrémů. Pokud je hranice tvořena více křivkami, je nutno spočíst funkční hodnoty i ve vrcholech hraničních křivek, tj. v průnicích různých vazeb.
3) Porovnáme všechny spočtené funkční hodnoty. Extrém s největší funkční hodnotou je globální maximum, extrém s nejmenší funkční hodnotou je globální minimum.

Jednou z možností, jak hledat globální extrém bez splnění předpokladů věty 10.2, je nalezení lokálních extrémů a u nich je potřeba dokázat, zda se jedná o extrémy globální či nikoli. K tomu bude ještě zapotřebí následující lemma.

Lemma 10.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n$ jsou kladná čísla. Potom platí*

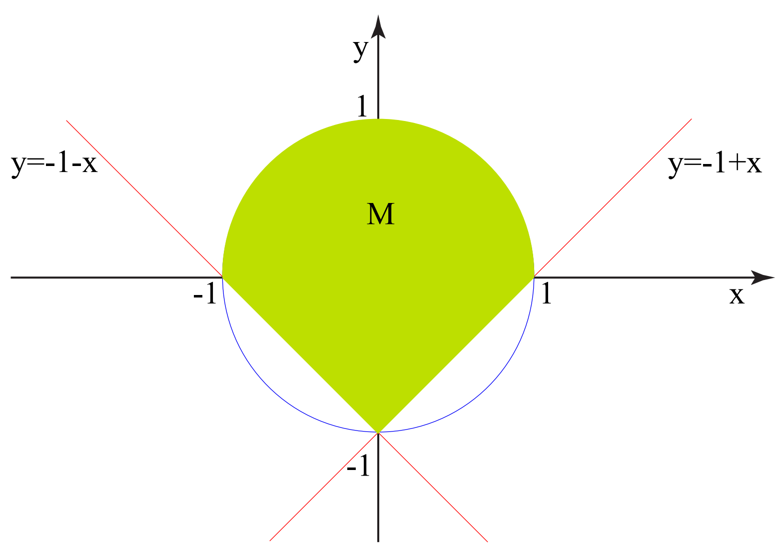
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{10.1}$$

Rovnosti nastanou pouze v případě, že $x_1 = \cdots = x_n$, tj. všechna čísla jsou stejná.

10.2 Řešené příklady

Příklad 10.4. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2$ na množině M dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq |x| - 1$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, pak dle věty 10.2 na množině M existuje maximum a minimum funkce f. Množina M viz obrázek 14.



Obrázek 14: Množina M

Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x, y) = 2x - y = 0 \ \Rightarrow \ y = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y - x = 0 \ \Rightarrow \ x = 2y.$$

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0, 0]$. Tento bod leží uvnitř množiny M. Dále hledáme body extrému funkce f na hranicích množiny M. Hranice množiny M je tvořena dvěmi úsečkami a jednou horní půlkružnicí. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na tři případy.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y - x + 1$ pro $x \in (0, 1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj $y = x - 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + (x-1)^2 - x(x-1) - 2 = x^2 - x - 1.$$

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \in (0, 1).$$

Dopočteme $y = -\frac{1}{2}$. Nalezli jsme stacionární bod $x_2^* = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y + x + 1 = 0$ pro $x \in (-1, 0)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj $y = -x - 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + (-x-1)^2 - x(-x-1) - 2 = 3x^2 + 3x - 1.$$

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0).$$

Dopočteme $y = -\frac{1}{2}$. Dostáváme stacionární bod $x_3^* = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

c) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y - \sqrt{1 - x^2} = 0$ pro $x \in (-1, 1)$, tj. uvažujeme horní půlkružnici. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné y z rovnice vazby, tj. $y = \sqrt{1 - x^2}$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x) = x^2 + 1 - x^2 - x\sqrt{1 - x^2} - 2 = -x\sqrt{1 - x^2} - 1.$$

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}},\;\; x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \in (-1,1).$$

Dopočteme $y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Obdržíme tedy další dva stacionární body $x_4^* = \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$, $x_5^* = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

Zbývá vyšetřit body $A = [-1,0]$, $B = [0,-1]$, $C = [1,0]$, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_1^*) = -2,\;\; f(x_2^*) = -\frac{5}{4},\;\; f(x_3^*) = -\frac{7}{4},\;\; f(x_4^*) = -\frac{3}{2},\;\; f(x_5^*) = -\frac{1}{2},$$

$$f(A) = f(B) = f(C) = -1,$$

$$f(x_1^*) < f(x_3^*) < f(x_4^*) < f(x_2^*) < f(A) < f(x_5^*).$$

Funkce f má v bodě $x_5^* = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ globální maximum a v bodě $x_1^* = [0,0]$ globální minimum.

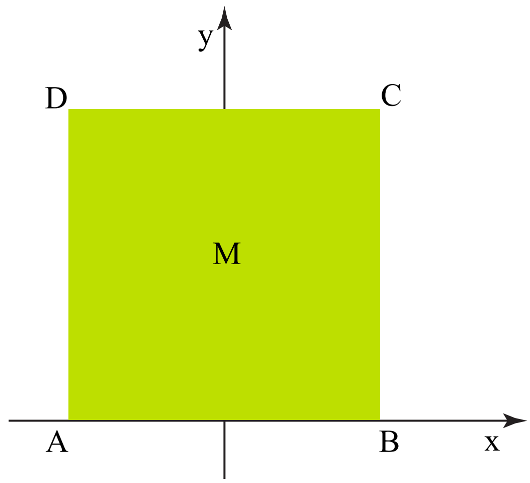
Poznámka 10.5. Při řešení příkladu mohlo být v bodě c) použito i Lagrangeovy funkce s vazbou $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, ale muselo by se dále uvažovat, že $y > 0$.

Příklad 10.6. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-x^2}$ na čtverci M, který je určen body $A = [-1,0]$, $B = [1,0]$, $C = [1,2]$, $D = [-1,2]$.

Řešení. Množinu M tvoří čtverec mající vrcholy v bodech $A = [-1,0]$, $B = [1,0]$, $C = [1,2]$, $D = [-1,2]$ a všechny body, které v něm leží, obrázek 15. Existence maxima a minima opět plyne z věty 10.2. Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = 0, \quad f_y(x,y) = 2y - 2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y = 1.$$

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0,1]$. Tento bod leží uvnitř množiny M. Dále hledáme body extrému funkce f na hranicích množiny M. Hranice



Obrázek 15: Množina M

množiny M je tvořena čtyřmii úsečkami. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na čtyři případy, tj. na jednotlivé úsečky zadaného čtverce.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = y = 0$ pro všechna $x \in (-1,1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření $y = 0$ z rovnice vazby převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in (-1,1).$$

Dostali jsme stacionární bod $x_2^* = [0,0]$.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = x - 1 = 0$ pro $y \in (0,2)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj. $x = 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \in (0,2).$$

Obdrželi jsme stacionární bod $x_3^* = [1,1]$.

c) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = y - 2 = 0$ pro všechna $x \in (-1,1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření $y = 2$ z rovnice vazby převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in (-1,1).$$

Získali jsme stacionární bod $x_4^* = [0,2]$.

d) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = x + 1 = 0$ pro $y \in (0,2)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj. $x = -1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \in (0,2).$$

Dostali jsme stacionární bod $x_5^* = [-1,1]$.

Zbývá vyšetřit vrcholy čtverce $ABCD$, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_2^*) = f(x_4^*) = 1, \;\; f(x_3^*) = f(x_5^*) = -1 + \mathrm{e}^{-1},$$
$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = \mathrm{e}^{-1},$$
$$f(x_3^*) < f(A) < f(x_2^*).$$

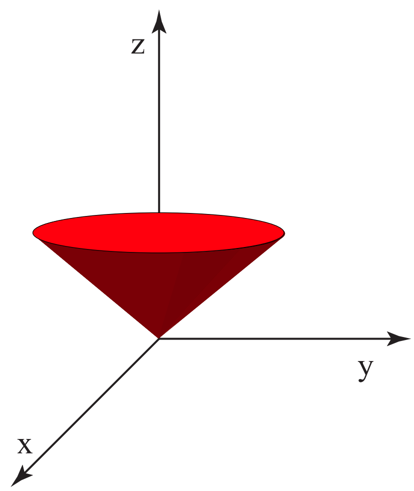
Funkce f má v bodech x_2^*, x_4^* globální maxima a v bodech x_3^*, x_5^* globální minima.

Příklad 10.7. Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + 2z^2$ na množině M dané nerovnostmi $\sqrt{x^2+y^2} \le z$, $z \le 3$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, pak dle věty 10.2 na množině M existuje maximum a minimum funkce f. Množina M viz obrázek 16.

Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y,z) = -2x = 0, \quad f_y(x,y,z) = -2y = 0, \quad f_z(x,y,z) = 4z = 0.$$



Obrázek 16: Množina M

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0, 0, 0]$. Tento bod neleží uvnitř množiny M. Nemá tedy smysl v tomto bodě pokračovat v hledání extrému.
Dále hledáme stacionární body funkce f na hranicích množiny M. Hranice množiny M je tvořena rovinou $z = 3$ a kuželem o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na dva případy.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y, z) = z - 3 = 0$ pro $x \in (-3, 3)$, $y \in (-3, 3)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné z z rovnice vazby, tj $z = 3$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce
$$F(x, y) = -x^2 - y^2 + 18.$$
Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,
$$F_x(x, y) = -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in (-3, 3),$$
$$F_y(x, y) = -2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \in (-3, 3).$$
Dostali jsme stacionární bod $x_2^* = [0, 0, 3]$.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ pro $x \in (-3, 3)$, $y \in (-3, 3)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné z z rovnice vazby, tj. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce

$$F(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2.$$

Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$F_x(x, y) = 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in (-3, 3),$$

$$F_y(x, y) = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \in (-3, 3).$$

Dopočteme $z = 0$. Dostali jsme stacionární bod $x_3^* = [0, 0, 0]$.

Zbývá vyšetřit body $A = [3, 0, 3]$, $B = [-3, 0, 3]$, $C = [0, 3, 3]$, $D = [0, -3, 3]$, které jsou průniky daných vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_2^*) = 18, \quad f(x_3^*) = 0,$$

$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 9,$$

$$f(x_3^*) < f(A) < f(x_2^*).$$

Funkce f má v bodě x_2^* globální maximum a v bodě x_3^* globální minimum.

Poznámka 10.8. Při řešení příkladu mohlo být v bodech *a*), *b*) použito i Lagrangeovy funkce s příslušnou vazbou $g(x, y, z) = 0$.

Příklad 10.9. Určete rozměry nádrže tvaru kvádru o objemu $V = 32$ m^3 tak, aby dno a stěny měly co nejmenší povrch.

Řešení. Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže, kde $x, y, z > 0$. Máme spočíst minimální povrch nádrže $S(x, y, z)$, je-li dán objem $V = 32$. Hledáme tedy vázané minimum funkce $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ s vazbou $g(x, y, z) = V(x, y, z) = xyz = 32$. Úlohu budeme řešit jednoznačným vyjádřením proměnné x z vazebné rovnice g, tj.

$$g(x, y, z) = xyz - 32 = 0 \Rightarrow x = \frac{32}{yz}.$$

Tento vztah dosadíme do dané funkce $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ a dostaneme

$$F(y, z) = \frac{32}{z} + \frac{64}{y} + 2yz.$$

Úlohu na vázaný extrém funkce S jsme převedli na úlohu o lokálních extrémech funkce F. vzhledem k množině $M = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y > 0, z > 0\}$. Tato množina není uzavřená, ani ohraničená, tudíž v dalším výpočtu nelze použít větu 10.2. Není tedy zaručeno, že hledané globální minimum existuje. Pokud existuje bod nabývající globálního minima, pak je tento bod současně bodem lokálního minima, protože žádný hraniční bod do množiny M nepatří. V dalším postupu budeme hledat lokální extrémy. Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Platí

$$F_y = -\frac{64}{y^2} + 2z = 0, \quad F_z = -\frac{32}{z^2} + 2y = 0.$$

Z rovnice $F_y = -\frac{64}{y^2} + 2z = 0$ vyjádříme $z = \frac{32}{y^2}$ a jeho dosazením do druhé rovnice dostáváme $2y - \frac{y^4}{32} = 0$. Odtud $y = 0 \vee y = 4$. Hodnota $y = 0$ nevyhovuje zadání. Dále pracujeme pouze s hodnotou $y = 4$. Dopočteme $z = 2$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $[4, 2]$. Dopočteme $x = 4$. Dalším výpočtem pomocí druhých derivací funkce F bychom zjistili, zda je bod $[4, 2]$ bodem lokálního minima. Tento výpočet by mohl být pracný a stejně bychom se nedozvěděli, zda v tomto bodě je extrém globální či nikoli.
Dostali jsme, že rozměry nádrže jsou $4 \times 4 \times 2$ a povrch $S = 48$ m^2.
Doposud jsme zjistili, že pokud globální minimum existuje, pak musí být v bodě $[4, 4, 2]$. Nyní použijeme lemma 10.3, abychom ukázali, že skutečně v bodě $[4, 4, 2]$ je globální minimum. Pro $n = 3$ položíme $x_1 = xy$, $x_2 = 2xz$, $x_3 = 2yz$ a dosadíme do pravé nerovnosti ve vztahu (10.1), tj.

$$\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = (2xyz)^{2/3} \leq \frac{xy + 2xz + 2yz}{3} = \frac{S}{3}.$$

Nyní dosadíme za objem $V = xyz = 32$, tedy $48 \leq S$. Tím jsme ověřili, že bod $[4, 4, 2]$ je globálním minimem.

10.3 Úlohy k samostatnému řešení

Cvičení 10.1. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 2xy + x^2$ na čtverci M s vrcholy $A = [-1, -1]$, $B = [1, -1]$, $C = [1, 1]$, $D = [-1, 1]$

Cvičení 10.2. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + 2y^2 - y - 3x$ na trojúhelníku s vrcholy $A = [-2, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [0, 1]$.

Cvičení 10.3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 y$ na kruhu o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$.

Cvičení 10.4. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině M určené nerovností $9x^2 + y^2 \leq 4$.

Cvičení 10.5. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ na obdélníku M určeném body $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [2, 1]$, $D = [0, 1]$.

Cvičení 10.6. Na množině M určené nerovnostmi $x^2 \leq y$, $x \geq 0$, $y \leq 9$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = xy - x + y - 1$.

Cvičení 10.7. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\}$.

Cvičení 10.8. Na množině M určené vztahem $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y, z) = x + y + z$.

Cvičení 10.9. Na množině M určené nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x$.

Cvičení 10.10. Najděte globální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

na množině M určené nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \geq 16$.

Řešení ke cvičením

Cvičení 1.1. $\mathbb{R}^2$ □

Cvičení 1.2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 - 3y^2 \leq 1\}$ □

Cvičení 1.3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \geq |y|, x \neq y\}$ □

Cvičení 1.4. $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$ □

Cvičení 1.5. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4, x \neq 0\}$, všechny body ležící na a vně kružnice o poloměru 2 se středem v počátku □

Cvičení 1.6. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; xy - 3 > 0\}$, všechny body, které leží v prvním kvadrantu nad a ve třetím kvadrantu pod větví hyperboly $xy = 3$ □

Cvičení 1.7. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x + y \leq 1\}$, všechny body, které leží na a mezi rovnoběžnými přímkami $y = -x - 1$ a $y = -x + 1$ □

Cvičení 1.8. $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, všechny body ležící uvnitř a na povrchu koule o poloměru 3 se středem v počátku □

Cvičení 1.9. kružnice se středem v počátku □

Cvičení 1.10. elipsy se středem v počátku, jejichž hlavní poloosa je třikrát delší než vedlejší a leží v ose y □

Cvičení 2.1. $\sqrt{3}$ □

Cvičení 2.2. 0 □

Cvičení 2.3. 0 □

Cvičení 2.4. neexistuje □

Cvičení 2.5. neexistuje □

Cvičení 2.6. 2 □

Cvičení 2.7. 0 □

Cvičení 2.8. 0 □

Cvičení 2.9. ano □

Cvičení 2.10. ano □

Cvičení 2.11. $c = 1$ □

Cvičení 2.12. limita neexistuje □

Cvičení 3.1. $f_x(1,0) = 1$, $f_y(1,0) = 2$ □

Cvičení 3.2. $f_x(\pi/6, \pi/3) = f_y(\pi/6, \pi/3) = 0$ □

Cvičení 3.3. $f_x = \mathrm{e}^x(\operatorname{tg}(x-y) + 1/\cos^2(x-y))$, $f_y = -\mathrm{e}^x/\cos^2(x-y)$ □

Cvičení 3.4. $f_x = \frac{2}{\sqrt{x}(3y^2+1)}$, $f_y = \frac{-24\sqrt{x}y}{(3y^2+1)^2}$ □

Cvičení 3.5. $f_x = \frac{7y}{(x+2y)^2}$, $f_y = -\frac{7x}{(x+2y)^2}$ □

Cvičení 3.6. $f_x = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $f_y = 2\sqrt{x} - \frac{y}{z}\mathrm{e}^{y/z} - \mathrm{e}^{y/z}$, $f_z = \frac{y^2}{z^2}\mathrm{e}^{y/z}$ □

Cvičení 3.7. $f_w = 2wu^2 - x^3 - xuz^2\sin(wz^2)$, $f_x = -3wx^2 + u\cos(wz^2)$,
$f_y = 128y^7z^4$, $f_z = -2wxuz\sin(wz^2) + 64y^8z^3$ □

Cvičení 3.8. $f_{xy} = f_{yx} = 3\mathrm{e}^{-3x}\sin y$ □

Cvičení 3.9. $f_{xy} = f_{yx} = -1/(x+y)^2$ □

Cvičení 3.10. ano □

Cvičení 4.1. Ano, funkce je diferencovatelná. □

Cvičení 4.2. $\mathrm{d}f(\frac{\pi}{8}, 1, 2)(h_1, h_2, h_3) = 16h_1 + (4-\pi)h_2 + 4h_3$ □

Cvičení 4.3. $\mathrm{d}f(-1, 1)(h_1, h_2) = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2$ □

Cvičení 4.4. $\mathrm{d}^2f(4, 1)(h_1, h_2) = 2\pi\, h_1h_2 - h_2^2$ □

Cvičení 4.5. $\mathrm{d}^2f(-4, \frac{\pi}{3}, 2)(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + 9h_3^2 - \sqrt{3}h_1h_2 +$
$+ 4h_1h_3 - 4\sqrt{3}h_2h_3$ □

Cvičení 4.6. $\mathrm{d}^3f(x, y)(h_1, h_2) = \frac{1}{x^2}h_1^3 - 3\frac{1}{y^2}\, h_1h_2^2 + 2\frac{x}{y^3}h_2^3$ □

Cvičení 4.7. $f(x, y) = -\frac{1}{2}y^2\cos 2x - 4y + c$ □

Cvičení 4.8. tečná rovina: $z = 3x - 2y - 4 + \ln 8$, normála: $x = 2 - 3t$,
$y = 1 + 2t$, $z = \ln 8 + t$, $t \in \mathbb{R}$ □

Cvičení 4.9. $T_2(x, y) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}x + y + 1$, $T_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{49}{32}$ □

Cvičení 4.10. $T_3(x, y) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{16}(x-1)^2 +$
$+ \frac{1}{8}(x-1)(y-\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{16}(y-\sqrt{3})^2 - \frac{1}{8}(x-1)^2(y-\sqrt{3}) + \frac{1}{24}(y-\sqrt{3})^3$ □

Cvičení 4.11. $T_2(x, y, z) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) + \frac{1}{16}(z-4) -$
$- \frac{1}{64}(z-4)^2 - \frac{1}{16}(x-1)(z-4) + \frac{1}{16}(y-2)(z-4)$ □

Cvičení 5.1. $(5\cos 5x\cos 3x + 3\sin 5x\sin 3x)/(\sin^2 5x + \cos^2 3x)$ □

Cvičení 5.2. $(x+y^2)^{-1}(1/2\sqrt{1+t}+y/\sqrt{t})$ $\square$

Cvičení 5.3. $(-2t+1)\mathrm{e}^{-t^2-t}$ $\square$

Cvičení 5.4. $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial t}=2/(s+t)$ $\square$

Cvičení 5.5. $\frac{\partial w}{\partial s}=0$, $\frac{\partial w}{\partial t}=5\mathrm{e}^t$ $\square$

Cvičení 5.6. $\frac{\partial w}{\partial r}=3r^2s^3t-1/(r^2st^3)$, $\frac{\partial w}{\partial s}=3r^3s^2t-1/(rs^2t^3)$, $\frac{\partial w}{\partial t}=r^3s^3-3/(rst^4)$ $\square$

Cvičení 5.7. $\frac{\partial w}{\partial r}=2r[(s^2-t^2)/(r^2+s^2)]^2w$, $\frac{\partial w}{\partial s}=2s[(r^2+t^2)/(r^2+s^2)]^2w$, $\frac{\partial w}{\partial t}=2t[(s^2-r^2-2t^2)/(r^2+s^2)]w$ $\square$

Cvičení 5.8. $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\phi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\phi$, $\frac{\partial z}{\partial \phi}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\phi+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\phi$ $\square$

Cvičení 5.9. ano $\square$

Cvičení 5.10. Návod: položte $u=x+at, v=x-at$ $\square$

Cvičení 6.1. $\frac{7}{52}$ $\square$

Cvičení 6.2. $\mathrm{e}(\frac{\sqrt{2}-1}{2})$ $\square$

Cvičení 6.3. $7\sqrt{3}-16$ $\square$

Cvičení 6.4. 0 $\square$

Cvičení 6.5. -1 $\square$

Cvičení 6.6. $(2/5,1/5)$ $\square$

Cvičení 6.7. $(2,-3/2,-2)$ $\square$

Cvičení 6.8. $-8\sqrt{\pi/3},(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ $\square$

Cvičení 6.9. $2\sqrt{6},(-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-4/\sqrt{6})$ $\square$

Cvičení 6.10. $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}),50\sqrt{2}^{\circ}C/\mathrm{cm}$ $\square$

Cvičení 7.1. $y'=-\frac{y[(x+y)\ln(x+y)+x]}{x[(x+y)\ln(x+y)+y]}$, $y'(2)=-1$ $\square$

Cvičení 7.2. $f'(0)=0$ $\square$

Cvičení 7.3. $y'(1)=\pi$, $y''(1)=2\pi$, $T_2(x)=\pi+\pi(x-1)+\pi(x-1)^2$ $\square$

Cvičení 7.4. $y'=\frac{-2xy^3+\mathrm{e}^{\cos x}\sin x}{1+3x^2y^2+2y\cos y^2}$, $y'(\frac{\pi}{2})=1$ $\square$

Cvičení 7.5. tečna $x+2y-3=0$, normála $2x-y-1=0$ $\square$

Cvičení 7.6. $x_0=-3$ lokální minimum, $x_0=-1$ lokální maximum $\square$

Cvičení 7.7. $z_x = \frac{z^2-3}{z^2+2yz-3}$, $z_x(1,-3) = -\frac{1}{11}$,$z_y = \frac{(z^2-3)(z-x)}{y(z^2+2yz-3)}$, $z_y(1,-3) = \frac{1}{33}$ □

Cvičení 7.8. $z_x = \frac{(1+z^2)(4+5x^2)}{1+x^2}$, $z_y = -\frac{1+z^2}{1+y^2}$ □

Cvičení 7.9. $z_x = \frac{z}{x}$, $z_y = -\frac{z}{y\ln y}$, $z_{xx} = \frac{z_x}{x} - \frac{z}{x^2}$, $z_{xy} = \frac{z_y}{x}$, $z_{yy} = \frac{z(2+\ln y)}{y^2\ln^2 y}$, $T_2(x,y)(1,2) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2\ln 2} - frac12\ln 2(x-1)(y-2) + \frac{2+\ln 2}{8\ln^2 2}(y-2)^2$ □

Cvičení 7.10. $4x + 3y - 6z + 16 = 0$ □

Cvičení 8.1. $[3,-1,-5]$ □

Cvičení 8.2. $[-2,0,-7]$, $[-2,1,-9]$ □

Cvičení 8.3. $[0,0]$ lokální minimum, $[\pm\sqrt{2},-1]$ sedlové body □

Cvičení 8.4. funkce nemá stacionární body □

Cvičení 8.5. $[0,k\pi]$ k je celé číslo - sedlové body □

Cvičení 8.6. $[4/3,4/3]$ lokální maximum, $[0,0]$, $[4,0]$, $[0,4]$ sedlové body □

Cvičení 8.7. $x = y = z = 17$ □

Cvičení 8.8. $[2/7,4/7,6/7]$ □

Cvičení 8.9. $[2,2,2]$, $[2,-2,-2]$, $[-2,2,-2]$, $[-2,-2,2]$, vzdálenost všech těchto bodů je $2\sqrt{3}$ □

Cvičení 8.10. dno, víko 2x2, výška 5 □

Cvičení 9.1. $[\frac{9}{16},\frac{1}{8}]$ - vázané lokální minimum □

Cvičení 9.2. $[-\frac{12}{5},-\frac{12}{5}]$ vázané lokální maximum, $[\frac{12}{5},\frac{12}{5}]$ vázané lokální minimum □

Cvičení 9.3. $[1,1]$ vázané lokální minimum, $[-1,-1]$ vázané lokální minimum □

Cvičení 9.4. $[1,0]$, $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ vázaná lokální minima, $[-1,0]$, $\left[\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{1}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ vázaná lokální maxima □

Cvičení 9.5. $[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}-1]$, $[\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,\frac{\pi}{4}-1]$ vázaná lokální maxima □

Cvičení 9.6. $[16, 16]$ lokální vázané minimum $\square$

Cvičení 9.7. $[2, 2, 1]$ lokální vázané minimum $\square$

Cvičení 9.8. $\left[\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right]$ lokální vázané maximum,
$\left[-\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$ lokální vázané minimum $\square$

Cvičení 9.9. $[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}]$ lokální vázaná minima,
$[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}]$ lokální vázaná maxima
$\square$

Cvičení 9.10. $[\frac{44}{31}, \frac{1}{31}, -\frac{27}{31}]$ lokální vázané minimum $\square$

Cvičení 10.1. $[1, 1]$, $[-1, -1]$ globální maxima,
$[1, -1]$, $[-1, 1]$ globální minima $\square$

Cvičení 10.2. $[\frac{-2-\sqrt{22}}{3}, \frac{5+\sqrt{22}}{3}]$ globální maximum,
$[1, 0]$ a $[-2, 0]$ globální minima $\square$

Cvičení 10.3. $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ globální maxima,
$\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ globální minima $\square$

Cvičení 10.4. $[\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}]$, $[-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}]$ globální maxima,
$[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}]$, $[\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}]$ globální minima $\square$

Cvičení 10.5. $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 1]$, $[0, 1]$ globální maxima,
$[1, \frac{1}{2}]$ globální minimum $\square$

Cvičení 10.6. $[3, 9]$ globální maximum,
$[\frac{1}{3}, \frac{1}{9}]$ globální minimum $\square$

Cvičení 10.7. $[\sqrt{10}, -\sqrt{10}]$ globální maximum,
$[2, 1]$ globální minimum $\square$

Cvičení 10.8. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ globální maximum,
$[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ globální minimum $\square$

Cvičení 10.9. $[1, \sqrt{3}, 0]$, $[1, -\sqrt{3}, 0]$ globální maxima,
$[-1, 0, 0]$ globální minimum $\square$

Cvičení 10.10. množina M není kompaktní $\square$