Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Janáčkovo nám. 2a, 66295 Brno

Oponentský posudek

Autor práce: **Lenka Lakomá**

Název disertace: **Young tableaux and decompositions of tensor spaces**

Oponent: **doc. RNDr. Josef Janyška, CSc.**

Předložená PhD-disertace se zabývá studiem projekcí tensorových prostorů, jejich rozkladem na ireducibilní komponenty a studiem bezestopých rozkadů tenzorů. Přitom je použita teorie representací a teorie Youngových schémat. Mimo úvodní částí je práce rozdělena do tří kapitol (2. - 4. kapitoly).

2. kapitola je věnována zavedení potřebných pojmů z teorie representací a Youngových schémat. U všech tvrzení jsou uvedeny důkazy.

Ve 3. kapitole jsou uvedeny vlastní výsledky autorky, které se týkají studia projekcí na tensorových prostorech různých typů. Po úvodní části, ve které je připomenuta teorie absolutně invariantních tensorů, zkoumá autorka projekce na prostorech tensorů typu $(0,k)$, $(1,k)$ a symetrických a antisymetrických tensorů typu (r,k). V případě tensorů typu $(0,k)$ jsou využita Youngova schémata pro popis projekcí tensorů na jejich ireducibilní komponenty. Obecnou teorii autorka aplikuje na případ tensorů typu $(0,3)$. Je popsán úplný rozklad tensoru typu (0,3) na ireducibilní komponenty. U obhajoby bych prosil o objasnění tvrzení z poznámky na konci části 3.2, že projekce f_i dávají jediné representace grupy $GL_n(\mathbb{R})$.

V části 3.3 se autorka věnuje projekcím na prostoru E^1_k, kde E^1_k je podprostor v prostoru tensorů typu $(1,k)$, jejichž dolní indexy splňují symetrie dané nějakým Youngovým schématem. Jsou tedy studována L^1_n-invariantní zobrazení $f : E^1_k \to E^1_k$ splňující $f \circ f = f$. V tomto případě volí autorka jinou metodu – přímý výpočet v souřadnicích. Bylo nalezeno explicitní vyjádření takovýchto projekcí. K důkazu Věty 3.3.1 (totéž se týká i Věty 3.3.2) mám následující připomínku. Věta 3.1.1 neimplikuje, že koeficinty v (3.66) jsou tvaru $c_i/k!$. Tento tvar vyplyne až z průběhu důkazu, kdy pravé strany soustavy (3.71) jsou násobeny číslem $k!$.

Stejnými metodami jako v části 3.3 se potom v části 3.4 studují projekce na prostorech $S^r\mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^k$ a $A^r\mathbb{R}^n \otimes A^k\mathbb{R}^k$, tj. na prostorech tensorů typu (r,k) úplně symetrických či antisymetrických v dolních i horních indexech. V tomto případě již se metoda explicitního vyjádření v souřednicích jeví jako nepřehledná, dlouhé řady sum jsou pro čtenáře nekontrolovatelné.

V poslední 4. kapitole jsou zkoumány rozklady tensorů typu (p, q) na bezestopé komponenty. Standardní případ byl poprvé studován D. Krupkou; autorka v části 4.1 uvádí Krupkovu větu včetně důkazu. Na závěr aplikuje tuto obecnou větu ve formě příkladů na konkrétní situace. Standardní bezestopé rozklady byly zobecněny J. Mikešem na F-bezestopé rozklady, kde F je nějaký afinor. Tento výsledek je uveden bez důkazu a je demonstrován na konkrétním příkladě. Vlastní výsledky jsou v části 4.3, zde jsou studovány kvaternionové bezestopé rozklady tensorů. Jsou uvažovány dva afinory, které definují kvaternionovou strukturu, a je dokázána obecná věta o rozkladu tensoru typu (p, q) na komponenty bez kvaternionové stopy. Tato obecná věta je demonstrována na případu tensoru typu $(1, 1)$.

Čtení předložené práce vyžaduje zvýšenou čtenářovu pozornost, protože na řadě míst jsou chyby v indexech a exponentech. Namátkou uvádím vzorce (3.28), (3.38), (3.60), (3.70) a (4.26), Věta 3.3.1 část 3) a 4). Tyto chyby ale nebrání porozumění textu.

Mimo připomínek uvedených dříve v tomto posudku chci v průběhu obhajoby požádat autorku o zodpovězení následujících obecnějších dotazů:

1. V některých částech práce mi chybí motivace, případně použitelnost výsledků. K čemu se např. dají použít kvaternoinové bezestopé rozklady?

2. V částech 3.3 a 3.4 L. Lakomá studuje pouze projekce na určitých podprostorech v prostoru všech tenzorů. Nalezené projekce se ale dají snadno rozšířit na celý prostor. Jaký je vztah mezi projekcemi na uvažovaných podprostorech a projekcemi z celého prostoru na tyto podprostory?

Závěr: Po obsahové, stylistické, jazykové i typografické stránce má práce řadu drobných nedostatků, přináší ale nové výsledky, takže po úspěšné obhajobě může být uznána jako jako PhD-disertace.

V Brně, 12. ledna 2000

Josef Janyška