MAT. BESEDA

7.1.2011

NEROVNOST

MO - B

① x, y, z nezáporné čísla.

Dokážte, že

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$$

$\downarrow$ kvadratický priemer

$\downarrow$ aritmetický priemer

Riešenie: $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$

$$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2xz+2yz$$

~~[illegible]~~

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$$

② Uvažujme dve nezáporné reálne čísla x a y, ktorých súčet je 1. Určte, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobúdať výraz

a) $x \cdot y$

b) x^2+y^2

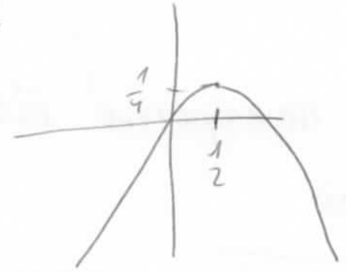
c) $\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}$

Zistite tiež, pre ktoré dvojice x a y sa tieto hodnoty nadobúdajú.

Riešenie: Rôzne spôsoby riešenia:

a) cez funkcie

$$xy = x(1-x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



pre $x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$

najväčšia hodnota $\frac{1}{4}$

najmenšia – aká? (0!)

cez nerovnosti AG $\quad \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

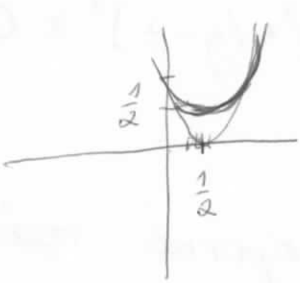
$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

rovnosť pre $x = y$

prediskutovať oba prístupy

b) $x^2+y^2 = (1-x)^2 + x^2 = 1 - 2x + 2x^2 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$0 \le x \le 1$



najmenšia $\frac{1}{2}$ pre $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

najväčšia ?

$x = 0$ a $x = 1$

$y = 1$ $\quad y = 0$ $\Big\}$ 1

rovnosť

cez nerovnosti $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \frac{x+y}{2}$

$$x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\frac{1}{(1+x)(1+y)} = \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{2+x-x^2}$

$x+y=1 \quad y = 1-x \quad 1+y = 2-x$

Preformulujem? $\frac{1}{zu}$ $\quad 1+x = u \quad 1+y = z$

$z+u = 3$

Podľa a)

$$zu \le \left(\frac{z+u}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{zu} \ge \frac{4}{9}$$ najmenšia $\frac{4}{9}$ pre $z = u = \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{2} = y$

najväčšia ?

(3) Uvažujme tri nezáporné reálne čísla x, y, z, ktorých súčet je 1. Určite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobúdať výraz

a) xyz

b) $xy + yz + zx$

c) $x^2 + y^2 + z^2$

Zistite tiež, pre ktoré trojice x, y, z sa tieto hodnoty nadobúdajú.

Riešenie: a) $\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$

$$\frac{1}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{1}{27} \ge xyz$$ naj~~menš~~väčšia hod. $\frac{1}{27}$ $x = y = z = \frac{1}{3}$

najmenšia 0 (ak je jedno 0)

z (1)

c) $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$ najmenšia $\frac{1}{3}$ $(x = y = z = \frac{1}{3})$

najväčšia 1 (jedno = 1 zvyšné 1)

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \ge 0$$

b)

$$1. \quad x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

to nám nepomôže ... ale hej

min. 0 až je jedno 0

zvyšok je xy

$x+y=1$

$xy+yz+zx$

najväčsia ~~1~~ napr. $\frac{1}{3}$

~~$x=y=\frac{1}{2}$ $z=0$~~

$(x+z)y+zx$

najmenšia ~~...~~

$(1-y)y$

0

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2xy-2yz$$

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[1-\underbrace{[x^2+y^2+z^2]}_{=U}\right)$$

$$0 \leq U \leq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

(4) Je daná kvadratická funkcia f, kde

$f(x)=ax^2+bx+c$, $a>0$

a reálne číslo S.

Uvažujme všetky dvojice reálnych čísel x_1 a x_2 so súčtom S. Dokážte, že výraz $f(x_1)+f(x_2)$ nadobúda najmenšiu možnú hodnotu práve vtedy, keď $x_1=x_2$.

Platí to aj pre $a<0$?

Riešenie:

$x_1+x_2=S$

$$f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2+bx_1+c+ax_2^2+bx_2+c=$$

$$=a(x_1^2+x_2^2)+bS+2c$$

$$x_1^2+x_2^2 \geq \frac{(x_1+x_2)^2}{2}=\frac{S^2}{2}$$

rovnosť až $x_1=x_2$.

To neplatí pre $a<0$!