Posudok na dizertačnú prácu

Marek Lampart: Three types of chaos on discrete dynamical systems

1. Úvod

Dizertačná práca skúma niektoré aspekty chaotického správania diskrétnych dynamických systémov zadaných spojitým zobrazením kompaktného metrického priestoru do seba. Tri druhy chaosu z nadpisu práce sú: Li-Yorkov chaos, ω-chaos zavedený Shihaiom Li a distribučný chaos zavedený Schweizerom a Smítalom. Pritom sa tu uvažujú rôzne silné varianty Li-Yorkovho a ω-chaosu. Súvis medzi týmito definíciami je v práci prehľadne znázornený na str. vii a ix na diagramoch, ktoré sú čiastočne aj výsledkom predloženej dizertácie.

2. O obsahu dizertačnej práce

Dizertačná práca je zjednotením niekoľkých článkov opatrených spoločným komentárom. Ide o články:

[1] M. Lampart: *Scrambled sets for transitive maps*, Real Analysis Exch. 27(2001-02), 801–808.

V práci sa skúma Lebesgueova miera 'scrambled' množín spojitých intervalových zobrazení. Po sérii prác o tejto problematike (Smítal, Kan, Misiurewicz, Bruckner a Hu; z mien nespomínaných v dizertácii treba spomenúť Jimeneza) Babilonová dokázala v istom zmysle definitívny výsledok: Každé spojité intervalové zobrazenie, ktorého druhá iterácia je tranzitívna (tzv. bitranzitívne zobrazenie) je topologicky konjugované so zobrazením majúcim scrambled množinu plnej miery a navyše extremálnu v tom zmysle, že pre každé dva body z nej sa nájdu časové okamihy, v ktorých sa tieto body nachádzajú ľubovoľne blízko opačných koncov intervalu. Hlavným výsledkom práce [1] je tvrdenie v podobnom duchu pre ω-chaos. Dokazuje sa, že konjugáciou bitranzitívneho zobrazenia možno vždy dosiahnuť, že zobrazenie bude mať okrem vlastnosti z Babilonovej vety aj c-hustú ω-scrambled množinu nulovej miery (navyše, každá ω-scrambled množina tohto zobrazenia je nulovej miery). Teda, čo sa týka miery, sú v tejto vete Li-Yorkov chaos a ω-chaos protikladné.

[2] M. Lampart: *Two kinds of chaos and relations between them*, Acta Math. Univ. Comen. 72(2003), 119–129.

Použijúc nezávisle Auslanderom a Ellisom dokázané klasické tvrdenie, že v kompaktnom dynamickom systéme je každý bod x proximálny k nejakému bodu minimálnej množiny ležiacej v uzávere orbity bodu x, v tomto článku autor dokazuje, že ak kompaktný systém vykazuje ω-chaos hoci len v tom najslabšom zmysle, tak má aj dvojprvkovú scrambled množinu. V práci sú ďalej uvedené zaujímavé príklady chaotických systémov. Vo vete 3.11 je skonštruovaný symbolický kompaktný systém s nekonečnou ω-scrambled množinou, ktorý má scrambled množiny len dvojprvkové (to zosilňuje jeden Pikulov výsledok). V článku nie je uvedený opis fázového priestoru X skonštruovaného systému z topologického hľadiska. Je to podmnožina Cantorovej množiny ale nie je jasné, či ide o Cantorovu množinu alebo má izolované body.

[3] J. L. García Guirao and M. Lampart: *Li and Yorke chaos with respect to the cardinality of the scrambled sets*, Chaos, Solitons and Fractals 24(2005), 1203 - 1206.

Autori si tu všímajú nasledujúci problém. Forti, Paganoni a Smítal skonštruovali trojuholníkové zobrazenie v štvorci, ktoré má dvojprvkové ale nie väčšie scrambled množiny. (Ako dokázali Kuchta a Smítal, taký príklad je nemožný na intervale.) Otázkou, ktorú si autor dizertácie so svojím spoluautorom položili je, v akých priestoroch okrem štvorca je to možné . Autori tu najskôr za predpokladu, že fázový priestor X spomínaného systému z článku [2] má izolované body, zväčšili X (a dodefinovali dynamiku) tak, aby bolo isté, že ide o Cantorovu množinu a dostali tak systém s dvojprvkovými a nie väčšími scrambled množinami. Ďalej tu autori dokazujú, že okrem Cantorovej množiny aj Varšavská kružnica pripúšťa spojité zobrazenie (homeomorfizmus) s dvojprvkovými ale nie väčšími scrambled množinami.

[4] M. Lampart: *Chaos, transitivity and recurrence*, Grazer Math. Ber., submitted.

Najskôr si tu autor všimol, že kompaktný systém nemôže byť jednoznačne ergodický na žiadnej invariantnej množine pozostávajúcej len z bodov, ktoré sú rekurentné a nie uniformne rekurentné. Tým je vyvrátené tvrdenie autorov Wang, Chu, Liao.

V tomto krátkom článku autor ďalej ukazuje, že keď sa vhodne skombinujú niektoré známe výsledky, možno vylepšiť Babilonovej-Štefánkovej vetu o tom, že každé bitranzitívne zobrazenie intervalu je konjugované s distribučne chaotickým zobrazením (autor dokazuje, že o distribučne scrambled množine tu možno tvrdiť, že pozostáva z bodov, ktoré su rekurentné a nie uniformne rekurentné). Podobné tvrdenie sa dokazuje aj pre Li-Yorkov chaos a ω-chaos.

3. Hodnotenie kvality dizertačnej práce

Dizertačná práca si od autora vyžiadala pomerne hlboké preniknutie do teórie dynamických systémov, najmä do metód topologickej dynamiky a symbolickej dynamiky. Práca prináša nové vedecké výsledky a prispieva tak k lepšiemu pochopeniu chaosu. Špeciálne, práca pomohla doplniť diagram znázorňujúci súvis medzi niektorými druhmi chaosu (str. vii, ix). Z formálnej stránky mám niektoré výhrady voči dizertácii. Je v nej totiž pomerne veľa tlačových chýb a nepresností vo formuláciách. Ak sa raz (na str. ii) definuje chaos ako existencia nespočítateľnej scrambled množiny tak dosť čudne pôsobí, ak sa ďalej vraví, že "Stronger notions of Li and Yorke chaos are these with two points, infinite or with an uncountable LY-scrambled set." Len v prvej polovici strany iii sú aspoň tri ďalšie závady (zamieňa sa Ω a S, v 6. až 7. riadku treba vynechať slovo uncountable, pretože inak je nezmyslom pokračovať "In particular ...", o štyri riadky nižšie namiesto "infinite" má byť "countable", čo je v danom kontexte zásadný rozdiel). Z chýb iného druhu spomeniem, že na str. xiii sa bibliografické údaje v [Ku] a [KS] zdajú byť vymenené. Takto by bolo možné pokračovať ďalej.

Z podstatnejších vecí som si všimol, že v článku [1] na str. 803, v dôkaze Lemy 2.2, má byť dvakrát inklúzia namiesto rovnosti. V dôkaze Lemy 2.4 sa hovorí, že podľa Vety 1.1 (chybne sa píše 1.2) zobrazenie f má ω-scrambled množinu s mohutnosťou c. Vo Vete 1.1 sa však tvrdí len existencia nespočítateľnej ω-scrambled množiny (ktorá by povedzme nemusela byť analytická). Odkiaľ sa teda vzala mohutnosť c? (To ma naozaj zaujíma z odborného hľadiska.) Varšavská kružnica sa v článku [3] nesprávne nazýva dvojrozmerným kontinuom, pričom sa to objavuje dokonca vo formulácii vety.

Samozrejme, aj keď nie je dizertačná práca napísaná po formálnej stránke tak pedantne ako by som si predstavoval, vzhľadom na nespornú kvalitu výsledkov nemám problém s vyslovením záveru svojho posudku.

4. Záver

Odporúčam, aby bol Marekovi Lampartovi udelený titul "PhD".

Banská Bystrica, 13. 5. 2005

Doc. RNDr. Ľubomír Snoha, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40
974 01 Banská Bystrica