MAT. BESEDY

16. 9 2011

KRITÉRIUM DELITEĽNOSTI 11:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0$ číslo n+1-miestne

10 dáva zvyšok pri delení 11 (-1)

zvyšok je teda

$$a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \dots + a_1(-1)^1 + a_0 \cdot (-1)^0$$

=> tento zvyšok je nula

ak ~~rozdiel~~ súčet číslic na párnych miestach $[(-1)^{2k} = 1]$

sa rovná ~~rozdielu~~ súčtu číslic na nepárnych miestach $[(-1)^{2k+1} = -1]$

(1) Dokážte, že žiadne desaťmiestne číslo zložené zo vzájomne rôznych číslic, ~~v ktoré~~ v desiatkovom zápise ktorého sa striedajú párne a nepárne číslice nie je deliteľné 11

Riešenie: Podstatné je, že ide o 10 ciferné číslo.

5 × párne číslo = párne číslo
5 × nepárne číslo = nepárne číslo

} ich rozdiel nemôže dať 0! je to nepárne číslo!

$$|s_p - s_n| \leq (9+8+7+6+5) - (4+3+2+1+0) = 25$$

$s_p = 2+4+6+8 = 20$
$s_n = 1+3+5+7+9 = 25$

} rozdiel je 5 a to nie je deliteľné 11!

(2). Určte počet päťciferných čísel zložených zo vzájomne rôznych

a) nepárnych
b) párnych

číslic

a deliteľných 11.

Riešenie: a) 0

Päť nepárnych čísel dáva súčet nepárny to nestačí.

nedá sa zvyšok 0
zvyšok 11 ? ???
nepárne − párne = 11
$x-y=11$
$x+y=25$
$2x=36$

~~súčet párnych a nepárnych číslic~~

1 3 5 7 9

9 16 25

b) $a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 = 0 \pmod{11}$

$a_5 + a_3 + a_1 = a_4 + a_2 \pmod{11}$

Možnosti výberu sú 0, 2, 4, 6, 8

Prebratím možností: 2+8 = 4+6, 0 sa pridá kdekoľvek → $4 \cdot 4 = 16$

4 možnosti pre výber 1. cifry → 4 možnosti pre výber druhej cifry...

(3) Bez delenia ukážte, že

$\boxed{2}0\ \boxed{1}1\boxed{1}\ 1\boxed{0}2$ je deliteľné 11.

Potom k nemu nájdite najbližšie menšie a najbližšie väčšie číslo deliteľné 11 zložené z rovnakých číslic ako dané číslo.

Riešenie:

$2+1+1+0 = 0+1+1+2$

Najbližšie väčšie: 20 111 201

menšie: $\underbrace{20\,11}$, 0211 (premiestňujem len posledné dve číslice)

(4) Dokážte, že platí: (2)

číslo $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ je deliteľné 11

práve keď je deliteľné 11 číslo

$$\overline{a_9 a_8} + \overline{a_7 a_6} + \overline{a_5 a_4} + \overline{a_3 a_3} + \overline{a_1 a_0}$$

Riešenie: $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ je deliteľné 11 $\Leftrightarrow$

$$a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0$$

Keďže $100 \equiv 1 \pmod{11}$

$$\overline{a_0 a_1} + \overline{a_2 a_3} + \overline{a_4 a_5} + \overline{a_6 a_7} + \overline{a_8 a_9}$$

je del. 11 $\Leftrightarrow$ keď $\overline{a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 \ldots a_1 a_0}$ je.

Takto sa dajú odvodiť ďalšie kritériá...

(A) $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ je deliteľné 101 $\Leftrightarrow$ $(100 \equiv -1 \pmod{100})$

$\overline{a_0 a_1} - \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} - \ldots$ je deliteľné 101

(B) $1001 = (-1) \bmod (1000)$

čísi $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ je deliteľné 1001 $\Leftrightarrow$

ak $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots$ je delit. 1001

del. 7, 11 a 13.

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

Príklad: 2 003 008 je deliteľná 7?

$008 - (003) + 2 = 7$ ÁNO!

524 784 je del. 13? $784 - 524 = 260$ ÁNO!

(5) 3AA1 je deliteľné 11.

Nájdite A!

Riešenie: $3+A \equiv A+1 \pmod{11}$

to nikdy neplatí..

také číslo ne ∃!

Iný: B4B3 je deliteľné 11. Nájdite B!

$2B \equiv 7 \pmod{11}$

$B = 9$ číslo je 9493.

Nech $F = 7, 11$ alebo 13...

$7 \times 11 \times 13 = 1001$

Potom 1. 7, 11 ani 13 nie je del. s 10 → najväčší spol. del. s 10 je 1!

2. $7 \times 11 \times 13 = 1001$

$\Rightarrow \underbrace{F \mid A \Leftrightarrow F \mid 10^n \cdot A}$, pre ľub. n a A.

2. $\Rightarrow 1000 \equiv -1 \pmod{F}$

Takže: $10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{2}$

$10^{n+2k} =$

Chcem ukázať kritérium:

- Rozdelím číslo po 2 cifrách od zadu.
- Nájdem zvyšky pri delení $F(7, 11 \text{ alebo } 13)$.

$(7 \equiv 2 \pmod{100})$

$7 \equiv \quad \pmod{1000})$

38391787 je del. 7?

38 39 17 87

3 4 3 3

4 4 4 3 → $\underbrace{3444}$ znova

34 44

6 2 ⇒ 1 2 → 21 je del. 7!

$$10^{3k} \equiv (-1)^{k} \pmod F$$

$$10^{n+2k} = \underbrace{(-1)^k} \cdot 10^{n-k} \pmod F$$ tu je ten TRIK

↓

prehodím poradie!

a mínus je doplnok!

$$M = 10^{2n} m_n + 10^{2n-2} m_{n-1} + 10^{2n-4} m_{n-2} + \dots + 10^2 m_1 + m_0$$

prehodené cifry!

$$10^n M = 10^n m_0 - 10^{n-1} m_1 + 10^{n-2} m_2 + \dots (-1)^n m_n \pmod F?$$

$$10^n M = 10^n m_0 + 10^{n+2} m_1 + 10$$

atď.