Učební texty k přednášce ALGEBRAICKÉ STRUKTURY
Michal Marvan, Matematický ústav
Slezská univerzita v Opavě

5. Věty o homomorfismech

Tvrzení. *Buď $(A, (\alpha)_{i\in I})$ algebra signatury (I, n).*

(1) *Buď B podalgebra v A, označme $\iota_B : B \to A$ injektivní zobrazení $\iota_B : b \mapsto b$ pro libovolné $b \in B$. Pak je $\iota_B : B \to A$ homomorfismem algeber.*

(2) *Buď ρ kongruence na A, označme $\pi_\rho : A \to A/\rho$ surjektivní zobrazení $\pi_\rho : a \mapsto [a]_\rho$ pro libovolné $a \in A$. Pak je $\pi_\rho : A \to A/\rho$ homomorfismem algeber.*

Důkaz. Cvičení.

Věta. *Buďte $(A, (\alpha)_{i\in I})$, $(B, (\alpha)_{i\in I})$ algebry signatury (I, n), buď $h : A \to B$ homomorfismus. Pak platí*

(1) *Obraz $\operatorname{Im} h := \{h(a) \in B \mid a \in A\}$ je podalgebra v B.*

(2) *Ekvivalence κ_h definovaná předpisem $a\kappa b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$ je kongruencí algebry A.*

(3) *Předpisem $[a]_{\kappa_h} \mapsto h(a)$, $a \in A$ je korektně definováno zobrazení $i_h : A/\kappa_h \to \operatorname{Im} h$, které je izomorfismem.*

(4) *Platí vztah $h = \iota_{\operatorname{Im} h} \circ i_h \circ \pi_{\kappa_h}$.*

Důkaz. (1) a (2): Cvičení.

(3) Ke korektnosti definice je potřeba, aby z rovnosti vzorů, $[a]_{\kappa_h} = [b]_{\kappa_h}$, vyplývala rovnost obrazů, $h(a) = h(b)$. Ale to je zřejmé z definice kongruence κ_h. Ověření, že i_h je bijektivní homomorfismus je užitečné cvičení.

(4) $\iota_{\operatorname{Im} h} \circ i_h \circ \pi_{\kappa_h}(a) = \iota_{\operatorname{Im} h} \circ i_h([a]_{\kappa_h}) = \iota_{\operatorname{Im} h}(h(a)) = h(a)$.

Důsledek. *Buďte $(A, (\alpha)_{i\in I})$, $(B, (\alpha)_{i\in I})$ algebry signatury (I, n). Pak platí*

(1) *Je-li $h : A \to B$ injektivní homomorfismus, pak je algebra A izomorfní podalgebře $\operatorname{Im} h \subseteq B$.*

(2) *Je-li $h : A \to B$ surjektivní homomorfismus, pak je algebra B izomorfní faktorové algebře A/κ_h.*

(3) *Každý homomorfismus $h : A \to B$ lze rozložit na kompozici surjektivního a injektivního homomorfismu: $h = f \circ g$, kde $f : A \to C$ a $g : C \to B$, f je surjektivní a g je injektivní.*

Cvičení. Uvažujme o zobrazení α, které reálnému číslu t přiřadí nenulové komplexní číslo $t \mapsto \cos t + i \sin t$.

(1) Ověřte, že se jedná o homomorfismus $(\mathbf{R}, +, 0, -) \to (\mathbf{C}^*, \cdot, 1, {}^{-1})$.

(2) Popište izomorfismus $\operatorname{Im} \alpha \cong \mathbf{R}/\kappa_\alpha$.

Návod: (1) Použijte Moivreovu větu. (2) Ukažte, že $\operatorname{Im} \alpha = S^1 := \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$ (na kružnici S^1 tak vzniká struktura grupy) a že kongruence κ_α je dána předpisem $t_1 \kappa_\alpha t_2$ když a jen když $t_1 - t_2 = 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbf{Z}$. Jiné označení: $\equiv_{2\pi}$.

Homomorfismus α má jednoduchou "dynamickou" interpretaci: Probíhá-li t "časovou osu" $\mathbf{R}$, obíhá $\alpha(t)$ kružnici S^1.