MATEMATICKÁ BESEDA

3.12.2010 INVARIANTY

N1. Na každej stene kocky je napísané práve jedno číslo, pričom všetky čísla nie sú rovnaké. V jednom kroku čísla na každej stene kocky nahradíme aritmetickým priemerom čísel na všetkých štyroch susedných stenách. Rozhodnite, či po niekoľkých krokoch môžu byť na stenách kocky opäť pôvodné čísla.

Riešenie: Popremýšľať nad zadaním, možnosťami.

Nech M je najväčšie z čísel. Pokiaľ M po prvom kroku zmizne zo stien, už sa na nich nikdy neobjaví.

Pokiaľ nezmizne, bude po prvom kroku na práve dvoch stenách a zmizne po druhom kroku.
rozmyslieť kde?

N2: Na tabuli sú napísané celé nezáporné čísla od 0 do 1234. Uvažujme nasledujúcu operáciu:
Zmažeme ľubovoľné dve čísla a miesto nich napíšeme na tabuľu ich rozdiel (od väčšieho odčítame menšie). Túto operáciu opakujeme, dokiaľ na tabuli nezostane posledné číslo. Môže na tabuli zostať číslo 2?

Riešenie: Invariant. .. parita súčtu čísel na tabuli sa nezmení

(N3): Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 100. Uvažujme nasledujúcu operáciu: zmažeme ľubovoľné dve čísla a miesto nich napíšeme na tabuľu ich súčet. Túto operáciu opakujeme, dokiaľ na tabuli nezostanú posledné tri čísla. Môžeme týmto spôsobom nakoniec získať tri po sebe idúce čísla?

Riešenie: Nie.

Invariant - deliteľnosť 3.

Súčet čísel na tabuli nie je del. 3 (rozmyslieť si... prečo!)

V každom kroku nemením deliteľnosť 3.

Súčet troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 3 (prečo?)

(N4): Na stole je n pohárov, všetky sú postavené dnom hore. V jednom kroku smieme otočiť ľubovoľných k pohárov naopak (k je dané, nemenné). Je možné, aby po konečnom počte krokov bolo všetkých n pohárov otočených dnom dole?

Rieste najpr pre $n=9$ a $k=5$

$n=9$ $k=4$

Riešenie: Pre $n=9$ a $k=5$ je to možné (napr. na tri kroky - ľahko sa vymyslí)

$n = 9$ a $k = 4$

to nejde.

Všeobecne platí

pri párnom k a ľubovoľnom n sa nemení parita

počtu pohárov postavených dnom hore

(tento počet je buď neustále párny alebo nepárny)

N5: Je daných n $(n \geq 2)$ prirodzených čísel, s ktorými môžeme spraviť nasledujúcu operáciu:

Vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky a nahradíme ich ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú počiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké ak

n = a) 2000

b) 35

c) 3

d) 17

a) $n = 2000$

Vyberiem 1000 čísel a urobím s nimi danú operáciu.

To isté so zvyšnými číslami.

Dostaneme 1000 čísel rovných a

a 1000 čísel rovných b.

Ak $a = b$ je úloha vyriešená.

Ak $a \neq b$ postupne vyberiem a a b a nahradím ich $\frac{a+b}{2}$.

Hotovo.

Dá sa.

$n = 35$

Vyberieme 7 pätic - v každej z nich dostaneme rovnaké čísla.

Teraz z každej pätice po 1 čísle a vytvorím priemery.

to zopakujem 7x. Hotovo. Dostanem rovnaké čísla.

$n = 3$. Skúsme si to pre nejakú trojicu?

Niekde to asi ide.

Napríklad ak $(1, 1, 2)$

$$\rightarrow \left(1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) \rightarrow \left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}\right)$$

Poznámka: Súčet čísel je vždy rovnaký! Vieme to dokázať? Ako?

Všeobecne: $a_1, \dots, a_n$ dané čísla..

Vezmime prvých m $(m < n)$

Dostaneme

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m}}_{m\text{-krát}}, a_{m+1}, \dots, a_n$$

Jasne vidieť, že ich súčet je rovnaký.

Ak z $(1, 1, 2)$ majú byť všetky čísla rovnaké, tak na konci úprav musíme dostať $\underset{\text{všetky čísla rovná}}{\wedge}$ $\frac{2+1+1}{3} = \frac{4}{3}$

To ale nejde - hore vyjdú len mocniny 2 v menovateli.

Dokázať sa to dá napr. mat. indukciou.

V prvom kroku to jasne platí.

Po k krokoch máme 3 čísla, ktoré majú v menovateli len mocniny čísla 2. V ďalšom kroku 1 číslo (nezmení nič) alebo 2 čísla. ... zrejmé.

Pre $n=3$ neexistuje pre každú trojicu čísel postupnosť krokov, ktorá by zmenila všetky čísla na čísla rovnaké.

$n=17$ podobne. nejde to

Využijeme to, že v každom kroku je zachovaný súčet čísel.
Vezmeme 17 čísel, ktorých súčet nie je del. 17.
V žiadnom kroku nedostaneme 17 do menovateľa,
dá sa zasa dokázať mat. indukciou.

6 Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Dokážte, že po konečnom počte vhodných krokov možno dosiahnuť, aby na hornej a dolnej stene boli rovnaké čísla.

Riešenie: zrejmé

7 Zadanie ako v 6 + ostatné čísla boli párne.
(Uvedomiť si - po kroku sa nemení celková parita súčtu všetkých čísel.
To všeobecne ani nejde?

MO:5: Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby na konci boli všade rovnaké čísla.

Ďalší krok by bol [rozmyslieť si možnosti zápisu!)
(a, b, b, b, b, a)