

Posudok oponenta na dizertačnú prácu Jana Kotůlka „On a Spectral Formulation of Quantum Mechanics“

V predloženej práci sa Jan Kotůlek zaoberá štúdiom Paschkeho formulácie skalárnej kvantovej mechaniky. V tomto prístupe základným objektom nie sú kanonické komutačné vzťahy pre operátory polohy a hybnosti pôsobiace na vlnové funkcie v Hilbertovom priestore, ale kvantovo-mechanický aparát je vybudovaný na pojme spektrálneho tripletu, čo prirodzeným spôsobom umožňuje konštruovať a vyšetrovať kvantovo-mechanické modely v nekomutatívnych priestoroch.

Po stručnom úvode je práca rozdelená do štyroch kapitol. Kapitoly 1 a 2 sú úvodné a zhrňajú základné pojmy potrebné na alternatívnu Paschkeho formuláciu kvantovej mechaniky. V prvej autor komentuje štandardný Bohrov prístup ku kvantovej mechanike a uvádza Feynmanove argumenty pre kompatibilitu Maxwellových rovníc s kvantovou mechanikou a ich dôsledky. V druhej autor najprv definuje pojem spektrálneho Connesovho tripletu (D, A, H) . Užitočnou dodatočnou štruktúrou sú dva operátory, *transporter* a *rising operator* (dvíhajúci operátor), ktoré umožňujú separovať "vonkajšie" a "vnútorné" štruktúry. Abstraktné konštrukcie sa ilustrujú na rade jednoduchých poučných príkladov.

Ťažisko práce tvoria kapitoly 3 a 4. Prvá z nich je venovaná spektrálnej formulácii nerelativistickej kvantovej mechaniky: najprv zhrnul axiómy spektrálnej kvantovej mechaniky, ilustruje ich na rade jednoduchých modelov na kružnici a sfére. Potom diskutuje otázky úplnosti a nevyhnutnosti systému axiém a niektoré topologické a geometrické aspekty (viacnásobne súvislé priestory, postulovanie soldernig formy). Posledná kapitola sa zaoberá relativistickou spektrálnou kvantovou mechanikou. Po komentári k histórii objavu relativistickej kvantovej mechaniky, sú uvedené príslušné spektrálne axiómy, ktoré sformulovali v roku 2005 Kopf a Paschke. Nasleduje diskusia o spinových a soldering štruktúrach. Relativistická kvantová mechanika nevyhnutne vedie ku kvantovému poľu: skúma sa voľné Diracove pole na nekomutatívnych 2-rozmerných torusoch, niektoré podrobnosti sú v Dodatku A.

Predložená práca je spracovaná veľmi starostlivo, je napísaná pekným anglickým jazykom (obsahuje minimum nepodstatných preklepov, ktoré neuvádžam). Formulácie sú prehľadné a výklad je konzistentný. Ku kladom práce patria:

- Podrobné historické komentáre k vzniku nerelativistickej a relativistickej kvantovej mechaniky,
- Konzistentné a presné zhrnutie matematického aparátu, pričom význam abstraktných konštrukcií je ilustrovaný na jednoduchých a názorných príkladoch.

Výsledky, ktoré uchádzač dosiahol boli publikované v 6 publikáciách a referované na viacerých konferenciách a seminároch. Dve z publikácií sú v renomovaných odborných časopisoch (ostatné sú príspevky v zborníkoch). Prvá práca, v *Journal of Mathematical Physics* (autor J. Kotůlek), sa týka triviálnosti a úplnosti súboru axiém spektrálnej kvantovej mechaniky, druhá, v *Electronic Journal of Theoretical Physics*

(autori T. Kopf, J. Kotůlek a A. Lampartová), sa zaoberá projektormi na kladné energie pre časticu (pole) so spinom.

K práci nemám kritické pripomienky, len niekoľko doplňujúcich poznámok a jednu otázku:

1. V súvislosti s príkladom 2.12 na str. 29 by bolo bývalo vhodné spomenúť, že z hľadiska relativistickej invariantnosti, v danom prípade $SO(2,1)$, je možné uvažovať reálne Cliffordove algebry so signatúrou $(1,2)$ alebo $(2,1)$: prvá z nich, uvažovaná v práci, je izomorfná s algebrou $M_2(\mathbf{R})+M_2(\mathbf{R})$, kým druhá s $M_2(\mathbf{C})$. Rozdiel je v zahrnutí diskretných symetrií (podobná situácia je aj v prípade Lorentzovej $SO(3,1)$ symetrie).
2. Niektoré príklady z kapitoly 3 by bolo zaujímavé skúmať v špecifickom vonkajšom magnetickom poli. Napríklad časticu na 2-rozmernej sfére v poli magnetického monopólu. Rovnako by mohlo byť zaujímavé skúmať nerelativistickú časticu so spinom v rámci 2+1 modelov popisovaných v práci.
3. Zaujímavá realizácia nekomutatívnych modelov sa získa tak, že sa uvažuje nerelativistická častica s hmotou m v 3-rozmernom priestore vo vhodnom magnetickom poli - v singulárnej limite $m \rightarrow 0$, v prípade homogénneho magnetického poľa získa sa model na nekomutatívnej (Moyalovej) rovine, v prípade magnetického monopólu v počiatku model na nekomutatívnej (fuzzy) sfére. Mohlo by byť zaujímavé skúmať takéto limitné prechody aj v rámci spektrálnej teórie.
4. Okrem technických problémov sú aj iné aspekty, prečo sa nespomína "fyzikálny" prípad nekomutatívnych zovšeobecnení 3+1 relativistickej symetrie?

Jan Kotůlek predložil veľmi dobrú prácu, ktorá sa zaoberá zaujímavými a aktuálnymi problémami modernej matematiky a matematickej fyziky: analyzoval postuláty nerelativistickej spektrálnej kvantovej mechaniky, rozšíril známe metódy, navrhol nové postupy v relativistickom prípade. Výsledky publikoval v renomovaných časopisoch a referoval o nich na viacerých odborných podujatiach.

Zhrnutie: Predložená práca spĺňa všetky podmienky kladené na dizertačnú prácu. Na jej základe vrelo doporučujem po jej obhajobe udeliť Janovi Kotůlkovi vedecko-pedagogickú hodnosť *philosphae doctor* (PhD).

V Bratislave, 28. 7. 2010



Peter Prešnajder

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
FMFI UK, Bratislava