Učební texty k přednášce ALGEBRAICKÉ STRUKTURY
Michal Marvan, Matematický ústav
Slezská univerzita v Opavě

Akce grup

Definice. Buď $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ grupa, buď X množina. Zobrazení $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \ell_g(x)$, se nazývá *levá akce* grupy G na množině X, platí-li

1° $\ell_g(\ell_h(x)) = \ell_{g \cdot h}(x)$,

2° $\ell_1(x) = x$.

pro libovolná $g, h \in G$ a $x \in X$.

Zobrazení $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto r_g(x)$, se nazývá *pravá akce* grupy G na množině X, platí-li podobně

$1'$ $r_g(r_h(x)) = r_{h \cdot g}(x)$,

$2'$ $r_1(x) = x$.

Říkáme též, že grupa G *působí* na množině X zleva resp. zprava.

Rozdíl mezi levým a pravým působením je na pravé straně vztahů 1° a $1'$. Je-li grupa G komutativní, pak mezi působením zleva a zprava není žádný rozdíl.

Často se používá zjednodušený zápis gx nebo $g(x)$ pro levou akci $\ell_g(x)$ a xg nebo $(x)g$ pro pravou akci $r_g(x)$. Potom se 1° zapisuje jako $g(hx) = (g \cdot h)x$, zatímco $1'$ jako $(xh)g = x(h \cdot g)$. Když 1° resp. $1'$ platí, můžeme závorky vynechat a psát prostě ghx resp. xhg.

Příklady. (1) Každá grupa $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ působí sama na sobě akcí $\ell_g x = g \cdot x$ zleva a akcí $r_g x = x \cdot g$ zprava. Zobrazení ℓ_g a r_g se nazývají *translace* (levá a pravá).

(2) Každá grupa $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ působí sama na sobě akcí $\ell_g x = g \cdot x \cdot g^{-1}$ zleva a akcí $r_g x = g^{-1} \cdot x \cdot g$ zprava. Zobrazení ℓ_g a r_g se nazývají *konjugace* (levá a pravá).

(3) Působení grupy $GL(n)$ regulárních matic $n \times n$ na množině $\mathrm{gl}(n)$ všech čtvercových matic $n \times n$ zprava podle vztahu

$$r_Q A = Q^{-1} A Q,$$

se vyskytuje v lineární algebře. Je-li V vektorový prostor, $A \in \mathrm{gl}(n)$ matice lineárního operátoru $\alpha : V \to V$ v bázi $e_1, \dots, e_n$ prostoru V a $Q \in GL(n)$ matice přechodu k bázi $e'_1, \dots, e'_n$ prostoru V, pak $r_Q A$ je matice operátoru α v bázi $e'_1, \dots, e'_n$. Jde o tzv. podobnostní transformaci matic.

(4) Buď E^n n-rozměrný vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ se skalárním součinem. Ortogonální transformace (tj. lineární transformace zachovávajících skalární součin) prostoru E^n tvoří grupu $(O(n), \circ, \mathrm{id}, ^{-1})$. Vztah $\ell_\phi v = \phi(v)$, kde $\phi \in O(n)$, $v \in E^n$ a $\phi(v)$ je hodnota zobrazení ϕ na vektoru v, zadává levou akci grupy $O(n)$ na E^n.

(5) Je-li X libovolná podmnožina v E^n, označme

$$\mathrm{Sym}(X) = \{\phi \in O(n) \mid \phi(X) = X\}.$$

$\mathrm{Sym}(X)$ se nazývá *grupa symetrií* nebo též *shodností* množiny X. $\mathrm{Sym}(X)$ je podgrupa v $O(n)$; její působení na X je podle stejné formule $\ell_\phi v = \phi(v)$, kde $\phi \in \mathrm{Sym}(X)$ a $v \in X$. Příkladem je grupa symetrií pravidelného n-úhelníka.

(6) Buď A afinní prostor dimenze n se zaměřením V. Zaměření je vektorový prostor a jeho aditivní grupa $(V, +, 0, -)$ působí na A podle vztahu $r_v a = a + v$, pro libovolný bod $a \in A$ a libovolný vektor $v \in V$.

Nadále budeme studovat jen levé akce. Výsledky se snadno přenesou na případ pravých akcí (viz též následující cvičení).

Cvičení. Buď $(G, \cdot, 1, {}^{-1})$ grupa. Zaveďme na množině G novou operaci $*$ vztahem $g*h = h\cdot g$. Ukažte, že $(G, *, 1, {}^{-1})$ je opět grupa (nazývá se *duální*) a že každá levá akce grupy $(G, \cdot, 1, {}^{-1})$ je pravou akcí grupy $(G, *, 1, {}^{-1})$ a naopak.

Tvrzení. *Nechť grupa G působí zleva na množině X. Pak jsou zobrazení $\ell_g : X \to X$, $x \mapsto \ell_g(x)$, bijektivní a platí*

$$\ell_{g^{-1}} = \ell_g^{-1}.$$

Důkaz. Vztah $\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g = \mathrm{id}_X$ ověříme výpočtem. Pro libovolné $x \in X$ totiž $\ell_{g^{-1}}(\ell_g(x)) = \ell_{g^{-1}g}(x) = \ell_1(x) = x$. Podobně se ověří vztah $\ell_g \circ \ell_{g^{-1}} = \mathrm{id}_X$.

Buď X libovolná množina, označme $\mathrm{Bij}(X)$ grupu všech bijekcí $X \to X$, vzhledem ke skládání zobrazení.

Důsledek. *Nechť na množině X působí zleva grupa G. Zobrazení $\ell : G \to \mathrm{Bij(X)}$, $g \mapsto \ell_g$, je homomorfismus grup $(G, \cdot, 1, {}^{-1}) \to (\mathrm{Bij}(X), \circ, \mathrm{id}, {}^{-1})$.*

Důkaz. Důkaz obdržíme kombinací předchozího tvrzení a definičních formulí 1°, 2°.

Cvičení. Ukažte, že každý homomorfismus grup $\phi : (G, \cdot, 1, {}^{-1}) \to (\mathrm{Bij}(X), \circ, \mathrm{id}, {}^{-1})$ zadává levou akci grupy G na množině X podle vztahu $\ell_g = \phi(g)$, $g \in G$.

Definice. Levé působení grupy G na množině X takové, že homomorfismus $\ell : G \to \mathrm{Bij}(X)$ je injektivní, se nazývá *efektivní.*

Tvrzení. *Akce grupy G na množině X je efektivní právě tehdy, když platí implikace: "Je-li $\ell_g(x) = x$ pro všechna $x \in X$, pak $g = 1$."*

Důkaz. Homomorfismus $\ell : G \to \mathrm{Bij}(X)$ je injektivní právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\,\ell = \{1\}$. Ovšem $\mathrm{Ker}\,\ell = \{g \in G \mid \ell_g = \mathrm{id}\} = \{g \in G \mid \ell_g(x) = x \ \forall x \in X\}$.

Cvičení. Ukažte, že akce (1), (4), (5), (6) jsou efektivní. Ukažte, že akce (3) není efektivní pro žádné n.

Cvičení. Buď G grupa, znnačme $Z(G) = \{g \in G \mid hg = gh \ \forall h \in G\}$. Ukažte, že akce (2) je efektivní právě tehdy, když $Z(G) = \{1\}$.

Cvičení. Buď ℓ akce grupy G na množině X. Ukažte, že existuje faktorová grupa $\tilde{G}$ grupy G a působení $\tilde{\ell}$ grupy $\tilde{G}$ na X takové, že $\ell_g = \tilde{\ell}_{[g]}$ a akce $\tilde{\ell}$ je efektivní.

Návod: $\tilde{G}$ je faktorová grupa podle normální podgrupy $\mathrm{Ker}\,\ell \subseteq G$.

Cvičení. Označme $\bar{\mathbf{R}}$ množinu $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Dokažte, že grupa $GL(2)$ působí na $\bar{\mathbf{R}}$ zleva podle vztahu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \lim_{z \to x} \frac{az + b}{cz + d}$$

a že tato akce *není* efektivní. Stejnou formulí je zadáno i působení grupy $SL(2)$; toto působení *je* efektivní.