Topol – rod dvouděložných rostlin z čeledi vrbovitých
(Encyklopedický slovník, Odeon, 1993)

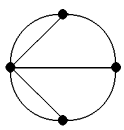
Topologie

Úvod

Tento text přináší základní i rozšiřující materiál k pravidelné přednášce z topologie. Vynechané důkazy jsou snadná cvičení. Autor děkuje studentce Jiřině Vodové za nalezení řady chyb v první verzi textu.

Obecně o topologii

Patrně nejstarší "topologickou" úlohou je známá úloha "O sedmi mostech města Královce," jejíž řešení předložil Sanktpetěrburgské akademii věd Leonard Euler 26. srpna 1735. Městem protéká řeka, tehdy překlenutá sedmi mosty a úlohou bylo nalézt trasu procházky jdoucí po každém mostě právě jednou. Trasa procházky musí být spojitá, není např. dovoleno skákat z jednoho ostrova na druhý. Na "suchozemské" trase pak vcelku nezáleží, podstatné informace jsou kolik je částí města oddělených vodou (čtyři: pravý a levý břeh řeky a dva ostrovy) a jak jsou vzájemně pospojovány mosty. Představíme-li si každou suchozemskou část smrštěnou do jednoho bodu a ponecháme jen informace o propojení mosty, je tehdejší situace popsána následujícím grafem:



Úloha o sedmi mostech města Královce je pak ekvivalentní úloze nalézt cestu procházející každou hranou grafu právě jednou (tzv. eulerovskou cestu; od stejné úlohy odvozuje svůj původ i teorie grafů). Topologické povahy je samotná redukce úlohy na ekvivalentní úlohu o grafech. Lze říci, že graf odráží topologii města Královce v první polovině osmnáctého století a potlačuje skutečnosti, které jsou pro řešení úlohy nepodstatné (z grafu se už nikdy nic nedozvíme např. o délce trasy). Podobných grafových úloh, jejichž souvislost s realitou tkví v nějaké topologické redukci, je více. Patří mezi ně známá úloha o obarvování rovinných map (čtyři barvy stačí) a do jisté míry i praktická úloha rozmisťování součástek na plošných spojích. Použitá topologická redukce je ovšem dosti triviální a proto jsou všechny uvedené úlohy obvykle řazeny mezi grafové a nikoliv topologické.

Mezi názorné, ale netriviální topologické úlohy patří *úloha klasifikace uzlů*. Uzel je uzavřená spojitá křivka (spojitý obraz kružnice) v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$. První úlohou je rozpoznat, které uzly lze převést jeden na druhý spojitou deformací prostoru, tedy bez trhání. Další úlohou je vytvořit "tabulku" všech uzlů (která je ovšem nekonečná). Teorie uzlů má aplikace např. v kvantové teorii pole, ale i v molekulární biologii (DNK se v buňkách může zauzlovat a existují topoizomerázy – enzymy, které zauzlenou DNK rozvážou).

Asi mediálně nejznámější topologickou úlohou je *Poincarého domněnka*, kterou nedávno kladně zodpověděl Grigorij Jakovlevič Perelman (1966). Její podstatu lze vyslovit tak, že jednoduše souvislá kompaktní varieta dimenze 3 je topologicky identická (přesněji homeomorfní) s třírozměrnou sférou S^3. Perelmanův důkaz však leží mimo topologii, stejně jako důkazy řady dalších hlubokých topologických výsledků.

Topologie je ovšem také pomocnou disciplínou matematické analýzy. Za to vděčíme asi nejvíce Georgu Cantorovi (1845–1918), který je všeobecně znám jako otec teorie množin. Topologické a množinové úvahy rozvíjel souběžně v letech 1879–1884 v souvislosti s jistými otázkami kolem oborů konvergence trigonometrických řad. Právě od něj pocházejí pojmy otevřená a uzavřená množina. Po prvních pokusech o axiomatický popis topologie, které vykonali Fréchet a Riesz, německý matematik Felix Hausdorff (1868–1942) v monografii *Einführung in die Mengenlehre* (1914) axiomatizoval pojem báze okolí bodu; mezi axiomy zahrnul i oddělovací axiom T_2. Kazimierz Kuratowski (1896–1980) axiomatizoval pojem uzávěru a jako první dospěl k teorii ekvivalentní s dnešní topologií. Dnes všeobecně přijímanou axiomatizaci pojmu otevřená množina zavedl Pavel Sergejevič Aleksandrov (1896–1982). Topologie vždy měla vazby na teorii metrických prostorů, v níž se axiomatizuje pojem vzdálenost bodů (metrika).

1. Systémy množin

Buď X množina. Množina všech podmnožin v X se v tomto textu značí 2^X. Aby se různé úrovně množin nepletly, podmnožina v 2^X se nazývá *systém množin na* X. Konečná podmnožina v 2^X se nazývá *konečný systém množin na* X. Jsou-li $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ nějaké systémy množin na X, pak řekneme, že $\mathcal{S}$ je *podsystém* v $\mathcal{T}$, jestliže $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, tj. jestliže každá množina ležící v systému $\mathcal{S}$ leží i v systému $\mathcal{T}$.

Buď $\mathcal{U}$ systém množin na X. *Sjednocení* $\bigcup\mathcal{U}$ systému $\mathcal{U}$ je množina všech prvků $x \in X$ ležících v alespoň jedné množině $U \in \mathcal{U}$. Je-li systém $\mathcal{U}$ prázdný, je jeho sjednocením prázdná množina. *Průnik* $\bigcap\mathcal{U}$ systému $\mathcal{U}$ je množina všech prvků $x \in X$ ležících ve všech množinách $U \in \mathcal{U}$. Je-li systém $\mathcal{U}$ prázdný, je jeho průnikem množina X (rozmyslete si proč).

Buď $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení. *Vzor* množiny $V \subseteq Y$ při zobrazení f je množina

$$f^{-1}V = \{x \in X \mid f(x) \in V\}.$$

Buď $\mathcal{V}$ nějaký systém množin na Y, pak množiny $f^{-1}V$, kde V probíhá $\mathcal{V}$, tvoří systém množin na X; značíme jej $f^{-1}\mathcal{V}$ a nazýváme *vzor systému množin* $\mathcal{V}$ při zobrazení f. Jak známo, platí

$$f^{-1}\Big(\bigcup\mathcal{V}\Big) = \bigcup f^{-1}\mathcal{V}, \qquad f^{-1}\Big(\bigcap\mathcal{V}\Big) = \bigcap f^{-1}\mathcal{V}.$$

Obraz množiny $V \subseteq X$ při zobrazení f je množina

$$fV = \{f(x) \mid x \in V\} \subseteq Y.$$

V tomto případě však pro průniky platí jen jedna inkluze:

$$f\Big(\bigcup\mathcal{V}\Big) = \bigcup f\mathcal{V}, \qquad f\Big(\bigcap\mathcal{V}\Big) \subseteq \bigcap f\mathcal{V}.$$

2. Topologie podle Aleksandrovovy definice

Definice. *Topologie* $\mathcal{T}$ na množině X je systém množin na X takový, že
1° Je-li $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ libovolný podsystém, pak $\bigcup\mathcal{U} \in \mathcal{T}$;
2° Je-li $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ libovolný konečný podsystém, pak $\bigcap\mathcal{U} \in \mathcal{T}$.
Prvky systému $\mathcal{T}$ se nazývají *otevřené množiny* v topologii $\mathcal{T}$.

Říkáme též, že topologie je systém množin na X uzavřený na konečné průniky a všechna sjednocení. Pak podle 1° je $\emptyset \in \mathcal{T}$ a podle 2° je $X \in \mathcal{T}$. Místo uzavřenosti na libovolné konečné průniky stačí předpokládat dva speciální případy (prázdný podsystém a všechny dvouprvkové podsystémy):

2′ $X \in \mathcal{T}$;

2″ Kdykoliv $U, V \in \mathcal{T}$, pak $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Vskutku, 2′ je případ prázdného podsystému a z 2″ snadno dokážeme indukcí 2° pro všechny neprázdné konečné podsystémy (cvičení).

Topologický prostor $(X, \mathcal{T})$ je množina X, na níž je zadána nějaká topologie $\mathcal{T}$; je-li výběr topologie zřejmý z kontextu, značí se tento topologický prostor prostě X. Připomeňme, že množina U je otevřená v topologii $\mathcal{T}$ právě tehdy, když $U \in \mathcal{T}$.

Doplněk $U' = X \setminus U$ otevřené množiny $U \in \mathcal{T}$ se nazývá *uzavřená množina* v topologii $\mathcal{T}$. Zřejmě platí: Konečná sjednocení a libovolné průniky uzavřených množin jsou uzavřené množiny.

Buď $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, buď $A \subseteq X$ jeho podmnožina. Sjednocení všech otevřených podmnožin množiny A je otevřená množina; nazývá se *vnitřek* množiny A a značí se A° nebo $\operatorname{int} A$. Zřejmě je vnitřek A° množiny A největší otevřená podmnožina v A.

Průnik všech uzavřených nadmnožin množiny A je uzavřená množina; nazývá se *uzávěr* množiny A a značí se $\overline{A}$ nebo $\operatorname{cl} A$. Zřejmě je uzávěr $\overline{A}$ množiny A nejmenší uzavřená podmnožina v X obsahující A.

Tvrzení. *Pro libovolnou podmnožinu A topologického prostoru X platí*

$$X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}, \qquad X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ.$$

Důkaz. Cvičení.

Tvrzení. *Pro libovolnou podmnožinu A topologického prostoru X platí*

$$A^\circ = \{x \in A \mid \exists_{U \in \mathcal{T}} x \in U \subseteq A\},$$

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall_{U \in \mathcal{T}} x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Důkaz. Formule pro A°: Množinu vpravo označme V. Inkluze $A^\circ \subseteq V$ je zřejmá, protože pro každé $x \in V$ můžeme položit $U = A^\circ$. Opačná inkluze $V \subseteq A^\circ$ plyne z toho, že V je sjednocením systému otevřených množin, a tedy otevřená.

Formule pro $\overline{A}$: Cvičení.

Topologie lze uspořádat inkluzí $\subseteq$. Největší topologií je systém 2^X, nazývá se *diskrétní* topologie; všechny podmnožiny v X jsou přitom otevřené. Nejmenší topologií je systém $\{\emptyset, X\}$, nazývá se *indiskrétní* topologie; jediné otevřené podmnožiny jsou $\emptyset$ a X. Tradičně se místo větší (menší) říká *jemnější* (*hrubší*) topologie.

3. Topologie podle Kuratowského definice

Zobrazení $A \longmapsto \overline{A}$ je uzávěrový operátor podle následující Kuratowského definice.

Definice. Buď X množina. *Kuratowského uzávěrový operátor* na X je zobrazení $^-\colon 2^X \longrightarrow 2^X$ splňující

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(ii) $A \subseteq \overline{A}$,
(iii) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$,
(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

pro každé $A, B \subseteq X$. Množina $\overline{A}$ se nazývá *uzávěr* množiny A.

Z (iv) pak snadno plyne, že Kuratowského uzávěrový operátor splňuje $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Buď dán Kuratowského uzávěrový operátor $^-$ na množině X. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq X$ je uzavřená, je-li $\overline{A} = A$. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq X$ je otevřená, je-li $A' = X \setminus A$ uzavřená. Systém všech otevřených množin potom splňuje podmínky 1° a 2° Aleksandrovovy definice (dokažte jako cvičení).

Topologie a Kuratowského uzávěrový operátor jsou si rovnocenné. Je-li totiž $\mathcal{T}$ topologie na množině X podle Aleksandrovovy definice a $^-$ příslušný uzávěrový operátor, pak systém všech otevřených množin podle Kuratowského je právě $\mathcal{T}$. Naopak, je-li $^-$ Kuratowského uzávěrový operátor a $\mathcal{T}$ jím vytvořená topologie, pak uzávěr v topologii $\mathcal{T}$ spývá s uzávěrem $^-$. Dokažte tato tvrzení jako cvičení.

4. Báze a subbáze

Buď $\mathcal{S}$ nějaký systém podmnožin množiny X. Označme $\mathcal{S}^{\cup}$ systém tvořený všemi sjednoceními $\bigcup \mathcal{L}$ všech podsystémů $\mathcal{L}$ v $\mathcal{S}$; nazývá se *uzávěr na sjednocení* systému $\mathcal{S}$. Platí $\emptyset \in \mathcal{S}^{\cup}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\cup}$ a $\mathcal{S}^{\cup\cup} = \mathcal{S}^{\cup}$. Označme $\mathcal{S}^{\cap}$ systém tvořený všemi průniky $\bigcap \mathcal{K}$ všech konečných podsystémů $\mathcal{K}$ v $\mathcal{S}$; nazývá se *uzávěr na konečné průniky* systému $\mathcal{S}$. Platí $X \in \mathcal{S}^{\cap}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\cap}$ a $\mathcal{S}^{\cap\cap} = \mathcal{S}^{\cap}$.

Systém $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ je topologie na množině X právě tehdy, když $\mathcal{T}^{\cup} = \mathcal{T}$ a $\mathcal{T}^{\cap} = \mathcal{T}$. Podsystém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se nazývá *báze* topologie $\mathcal{T}$, je-li $\mathcal{B}^{\cup} = \mathcal{T}$. Podsystém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ se nazývá *subbáze* topologie $\mathcal{T}$, je-li $\mathcal{S}^{\cap}$ báze topologie $\mathcal{T}$, to jest, je-li $\mathcal{S}^{\cap\cup} = \mathcal{T}$.

Každý systém $\mathcal{S}$ je subbazí topologie $\mathcal{S}^{\cap\cup}$:

Tvrzení. *Je-li $\mathcal{S}$ libovolný systém množin na X, pak $\mathcal{S}^{\cap\cup}$ je topologie na X a je nejmenší (tj. nejhrubší) mezi topologiemi obsahujícími $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Nejdříve si uvědomme, že z distributivního zákona plyne inkluze $\mathcal{S}^{\cup\cap} \subseteq \mathcal{S}^{\cap\cup}$. Je-li totiž $\mathcal{U}$ konečný podsystém v $\mathcal{S}^{\cup}$, pak můžeme psát $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, kde $U_i = \bigcup_{j \in J_i} U_{i,j}$ a indexová množina I je konečná (indexové množiny J_i jsou libovolné), načež podle distributivního zákona

$$\bigcap \mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} \Big(\bigcup_{j \in J_i} U_{i,j} \Big) = \bigcup_{\phi \in \prod_{i \in I} J_i} \Big(\bigcap_{i \in I} U_{i,\phi(i)} \Big).$$

Protože I je konečná, jsou průniky $\bigcap_{i \in I} U_{i,\phi(i)}$ vpravo vždy konečné. Výsledek proto leží v $S^{\cap\cup}$ a inkluze je dokázána.

Ověřme, že $\mathcal{S}^{\cap\cup}$ je topologie. Uzavřenost na sjednocení je triviální: $\mathcal{S}^{\cap\cup\cup} = \mathcal{S}^{\cap\cup}$; uzavřenost na konečné průniky: $\mathcal{S}^{\cap\cup\cap} \subseteq \mathcal{S}^{\cap\cap\cup} = \mathcal{S}^{\cap\cup}$, přičemž opačná inkluze je triviální.

Nakonec uvažujme o topologii $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$. Platí pak $\mathcal{S}^{\cap\cup} \subseteq \mathcal{T}^{\cap\cup} = \mathcal{T}^{\cup} = \mathcal{T}$.

Poznámka. Výraz $\prod_{i \in I} J_i$ na pravé straně distributivního zákona označuje součin množin J_i. Ten je definován jako množina všech zobrazení $\phi : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} J_i$ splňujících podmínku $\phi(i) \in J_i$ pro každé $i \in I$.

Cvičení. Dokažte distributivní zákon jak je uveden v důkazu.

Na druhé straně, ne každý systém $\mathcal{B}$ podmnožin v X je bazí některé topologie na X. Je-li systém $\mathcal{B}$ bazí topologie, pak jde o topologii $\mathcal{B}^{\bigcup}$. Přitom $\mathcal{B}^{\bigcup}$ je topologie právě tehdy, když je systém $\mathcal{B}^{\bigcup}$ uzavřený na konečné průniky.

Tvrzení. *Systém $\mathcal{B}$ je bazí topologie právě tehdy, když*

$$\forall_{U,V\in\mathcal{B}}\ \forall_{x\in U\cap V}\ \exists_{W\in\mathcal{B}}\ x \in W \subseteq U \cap V.$$

Důkaz. Podmínka říká, kdy je $\mathcal{B}^{\bigcup}$ uzavřená na konečné průniky.

5. Spojitá zobrazení

Definice. Buďte X, Y dva topologické prostory s topologiemi $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ se nazývá *spojité*, jestliže $f^{-1}\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, tj. je-li vzor každé otevřené množiny v prostoru Y otevřená množina v prostoru X. Množina všech spojitých zobrazení $X \longrightarrow Y$ se značí $C(X,Y)$.

Je-li $\mathcal{S}$ subbáze topologie $\mathcal{Y}$, pak f je spojité právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ (plyne z toho, že f^{-1} zachovává sjednocení a průniky). Tím spíše podobné tvrzení platí pro báze.

Snadno se ukáže, že kompozice spojitých zobrazení je spojité zobrazení. Nicméně, inverzní zobrazení k spojité bijekci nemusí být spojité, jak ukazuje příklad identického zobrazení z diskrétního do antidiskrétního prostoru na jedné a téže množině X.

Definice. *Homeomorfismus* topologických prostorů X, Y je bijektivní zobrazení $f : X \longrightarrow Y$, které je spojité a jehož inverze $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ je rovněž spojité zobrazení. Topologické prostory X, Y, mezi nimiž existuje homeomorfismus, se nazývají *homeomorfní.*

Například identická zobrazení $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})$ jsou homeomorfismy. Homeomorfní prostory jsou topologicky rovnocenné.

Tvrzení. *Zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ je spojité právě tehdy, když se uzávěr zobrazuje do uzávěru, tj.*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{fA}.$$

Důkaz. Cvičení.

6. Průnik topologií

Tvrzení. *Buďte $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, topologie na jedné a téže množině X. Pak je průnik $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ topologie na X.*

Důkaz. Nechť jsou množiny U, V otevřené ve všech topologiích $\mathcal{T}_i$, $i \in I$. To znamená, že $U, V \in \mathcal{T}_i$ pro každé $i \in I$. Protože $\mathcal{T}_i$ jsou topologie, jsou uzavřené na konečné průniky, a proto $U \cap V \in \mathcal{T}_i$ pro každé $i \in I$. Pak ale $U \cap V \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$. Podobně se ukazuje uzavřenost na obecná sjednocení (cvičení).

Průnik $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ je největší (tj. nejjemnější) topologie, která je menší (tj. hrubší) než kterákoliv z topologií $\mathcal{T}_i$, je to tedy infimum systému topologií $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$. Připomeňme, že uspořádaná množina se nazývá *úplný svaz*, má-li každá její podmnožina infimum.

Důsledek. *Množina všech topologií na množině X je úplný svaz.*

Sjednocení topologií ovšem nemusí být topologií. Nicméně, jsou-li $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, topologie na X, pak je $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ subbází některé topologie, kterou můžeme charakterizovat jako nejmenší (tj. nejhrubší) topologii, která je větší (tj. jemnější) než každá z topologií $\mathcal{T}_i$. Jde tedy o supremum systému topologií $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$.

Příklad. Buď X alespoň tříprvková množina, buďte $x_1 \neq x_2$ dva její prvky. Pro $i = 1, 2$ buď $\mathcal{T}_i$ topologie, jejímiž otevřenými množinami jsou $\emptyset$, $\{x_i\}$ a X. Pak sjednocení $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ není topologie, protože obsahuje množiny $\{x_1\}$ a $\{x_2\}$, ale nikoliv jejich sjednocení $\{x_1, x_2\}$.

7. Indukované topologie

Indukovaná topologie je topologie generovaná na zadané množině Y systémem zobrazení z nebo do nějakých topologických prostorů X_i. Jde o velmi důležitý způsob vytvoření topologie na dané množině.

Definice. Buďte X_i, $i \in I$, topologické prostory, buď $\{f_i : X_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ systém zobrazení do nějaké množiny Y. Označme $\mathcal{Y}$ systém množin na Y tvořený všemi podmnožinami $V \subseteq Y$, jejichž vzory $f_i^{-1}V$ jsou otevřené při všech zobrazeních f_i. Systém $\mathcal{Y}$ se nazývá *topologie indukovaná systémem zobrazení do* množiny Y.

Systém $\mathcal{Y}$ je skutečně topologií: je-li $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$, pak $f_i^{-1}\left(\bigcup \mathcal{V}\right) = \bigcup f_i^{-1}\mathcal{V}$ jsou otevřené množiny v X_i pro každé $i \in I$. Tudíž, $\bigcup \mathcal{V}$ leží v $\mathcal{Y}$. Podobně konečné průniky.

Topologie indukovaná systémem zobrazení $\{f_i : X_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ je průnikem topologií indukovaných jednotlivými zobrazeními $f_i : X_i \longrightarrow Y$, $i \in I$.

Zobrazení $f_i : X_i \longrightarrow Y$ jsou zřejmě spojitá v indukované topologii na Y; dokonce jde o nejjemnější topologii na Y, při níž ještě jsou všechna zobrazení f_i spojitá:

Tvrzení. *Buď Y topologický prostor s topologií indukovanou systémem zobrazení $f_i : X_i \longrightarrow Y$. Buď Z další topologický prostor, buď $g : Y \longrightarrow Z$ zobrazení. Pak je zobrazení g spojité právě tehdy, když jsou všechna zobrazení $g \circ f_i : X_i \longrightarrow Z$ spojitá.*

Důkaz. Je-li g spojité, pak jsou $g \circ f_i$ spojitá zobrazení, protože jsou složením spojitých zobrazení. Naopak: Buď W otevřená množina prostoru Z. Ze spojitosti zobrazení $g \circ f_i$ plyne, že všechny množiny $f_i^{-1}(g^{-1}W) = (g \circ f_i)^{-1}W$ jsou otevřené, a proto je $g^{-1}W$ otevřená množina v indukované topologii prostoru Y, což se mělo dokázat.

Příklad (Faktorový topologický prostor). Buď X topologický prostor, buď $\sim$ nějaká relace ekvivalence na X. Buď $\widetilde{X} = X/{\sim}$ faktorová množina, buď $p : X \longrightarrow \widetilde{X}$ odpovídající projekce. Topologie na prostoru $\widetilde{X}$ indukovaná projekcí p se nazývá *faktorová topologie* a $\widetilde{X}$ s touto topologií se nazývá *faktorový topologický prostor*.

Víme, že prvky prostoru $\widetilde{X}$ jsou třídy ekvivalence $\sim$. Podmnožina S prostoru $\widetilde{X}$ je pak systém podmnožin, tvořený třídami ekvivalence $\sim$ na X; označme jej $\mathcal{S} \subseteq 2^X$. Přitom $p^{-1}S = \bigcup \mathcal{S}$. Tudíž, množina tříd $\mathcal{S}$ je otevřená množina v $\widetilde{X}$ právě tehdy, když $\bigcup \mathcal{S}$ je otevřená množina v X.

Příklad (Suma topologických prostorů). Buď I indexová množina, buďte X_i, $i \in I$, topologické prostory. Označme

$$\sum_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times X_i)$$

(disjunktní sjednocení množin X_i). Pro každé $j \in I$ zaveďme zobrazení

$$\iota_j : X_j \longrightarrow \sum_{i\in I} X_i$$

předpisem $x \longmapsto (j, x)$. Prostor $\sum_{i\in I} X_i$ s topologií indukovanou systémem zobrazení ι_i, $i \in I$, se nazývá *suma topologických prostorů* X_i.

Definice. Buďte X_i, $i \in I$, topologické prostory, buď $\{f_i : Y \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$ libovolný systém zobrazení. Označme $\mathcal{Y}$ topologii na Y se subbází tvořenou všemi podmnožinami $f_i^{-1}U$, kde U je nějaká otevřená podmnožina v některém prostoru X_i. Topologie $\mathcal{Y}$ se nazývá *topologie indukovaná systémem zobrazení z* množiny Y.

Zřejmě jsou všechna zobrazení $f_i : Y \longrightarrow X_i$ spojitá; přesněji, $\mathcal{Y}$ je nejhrubší topologie na Y, při níž ještě jsou všechna zobrazení f_i spojitá.

Snadno se ověří, že ve speciálním případě systému tvořeného jediným zobrazením $f : Y \longrightarrow X$ je subbáze $\{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{X}\}$ přímo topologií. V obecném případě je topologie indukovaná systémem zobrazení $\{f_i : Y \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$ supremem topologií indukovaných jednotlivými zobrazeními $f_i : Y \longrightarrow X_i$, $i \in I$.

Pro snadné zapamatování můžeme shrnout: Systém podmnožin vytvořený jediným zobrazením $f : X \longrightarrow Y$ je vždy topologie, bez ohledu na to, zda indukujeme v X nebo v Y. V případě více zobrazení $f_i : X_i \longrightarrow Y$ je systém podmnožin vytvořený v Y průnikem topologií indukovaných jednotlivými zobrazeními f_i, a tedy je topologií. V případě více zobrazení $f_i : Y \longrightarrow X_i$ se v Y vytvoří systém, který je sjednocením topologií indukovaných jednotlivými zobrazeními f_i, který nemusí být topologií a je nutno vzít supremum.

Tvrzení. *Buď Y topologický prostor s topologií indukovanou systémem zobrazení $f_i : Y \longrightarrow X_i$. Buď Z další topologický prostor, buď $g : Z \longrightarrow Y$ zobrazení. Pak je zobrazení g spojité právě tehdy, když jsou všechna zobrazení $f_i \circ g : Z \longrightarrow X_i$ spojitá.*

Důkaz. Je-li g spojité, pak jsou $f_i \circ g$ spojitá zobrazení, protože jsou složením spojitých zobrazení. Naopak: Buď $W = f_i^{-1}U$ element subbáze prostoru Y, kde U je otevřená množina prostoru X_i. Pak $g^{-1}W = g^{-1}(f^{-1}U)$ je otevřená množina prostoru X, protože $f_i \circ g$ je spojité zobrazení.

Příklad (Podprostor). Buď X topologický prostor, buď Y nějaká podmnožina v X. Topologie na prostoru Y indukovaná vložením $Y \longrightarrow X$ se nazývá *topologie podprostoru.* Množina $U \subseteq Y$ je otevřená právě tehdy, když existuje otevřená množina $V \subseteq X$ taková, že $U = V \cap Y$.

Příklad (Součin topologických prostorů). Buď I indexová množina, buďte X_i, $i \in I$, topologické prostory. Součin množin X_i je množina zobrazení

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ \xi : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; \underset{i\in I}{\forall}\, \xi(i) \in X_i \right\}.$$

Prvek ξ se nazývá I-tice a výstižně se zapisuje jako $(\xi_i)_{i\in I}$, kde ξ_i je jen jiný zápis pro $\xi(i)$. Projekce $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ je definována předpisem $\xi \longmapsto \xi_j$. Množina $\prod_{i\in I} X_i$ s topologií indukovanou systémem zobrazení $\{\pi_i\}_{i\in I}$, se nazývá (Tichonovův) *součin topologických prostorů* X_i.

Cvičení. Ukažte, že součiny $[0, 1] \times [0, 1)$ a $[0, 1) \times [0, 1)$ jsou homeomorfní.

8. Kombinované zobrazení

Často je potřeba zkonstruovat spojité zobrazení po částech definičního oboru, na každé části jiným předpisem. Samozřejmě je nutno předpokládat, že na průniku dvou částí se oba předpisy shodují. Jsou-li všechny části otevřené množiny, snadno se ukáže, že kombinované zobrazení je spojité. Mnohem užitečnější je případ, kdy jsou jednotlivé části uzavřené. Následující tvrzení říká, že i v tomto případě je kombinované zobrazení spojité, pokud je kombinovaných zobrazení konečně mnoho.

Tvrzení. *Buďte X, Y topologické prostory, nechť X je sjednocením konečně mnoha uzavřených množin A_i. Buďte $f_i : A_i \longrightarrow Y$ spojitá zobrazení do topologického prostoru Y taková, že $f_i(x) = f_j(x)$ kdykoliv $x \in A_i \cap A_j$. Pak je předpisem*

$$f(x) = f_i(x) \text{ kdykoliv } x \in A_i$$

korektně definováno zobrazení $X \longrightarrow Y$, které je spojité.

Nelze vypustit předpoklad, že uzavřených množin A_i je jen konečně mnoho. Protipříkladem by byl rozklad prostoru X na jedoprvkové podprostory. Pro každé i nespojité zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ je totiž $f|_{\{x\}}$ vždy spojité.

Důkaz. Snadno se vidí, že pro každé $x \in X$ máme jedinou hodnotu $f(x)$, shodnou s $f_i(x)$ pro každé $i \in I$ takové, že $x \in A_i$. Ukažme, že vzor $f^{-1}V$ každé otevřené podmnožiny $V \subseteq Y$ je otevřená množina. Máme ovšem

$$f^{-1}V = X \cap f^{-1}V = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap f^{-1}V = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap f^{-1}V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}V,$$

přičemž jednotlivé množiny $f_i^{-1}V$ jsou otevřené z důvodu spojitosti zobrazení f_i. V tomto místě nelze důkaz ukončit poukazem na fakt, že sjednocení otevřených množin je otevřená množina. Problém je v tom, že množina $f_i^{-1}V$ je otevřená v podprostoru A_i a nemusí být (a zpravidla ani není) otevřená v prostoru X!

Podle definice podprostoru existují otevřené množiny $U_i \subseteq X$ takové, že $f_i^{-1}V = A_i \cap U_i$ pro každé $i \in I$. Položme

$$W_i = U_i \cup (X \setminus A_i) = X \setminus (A_i \setminus U_i),$$

což jsou zřejmě otevřené množiny. Protože I je konečná, je i $\bigcap_{i \in I} W_i$ otevřená množina. Přitom

$$\bigcap_{i \in I} W_i = \bigcap_{i \in I}(X \setminus (A_i \setminus U_i)) = X \setminus \bigcup_{i \in I}(A_i \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I}(A_i \setminus f^{-1}V) = f^{-1}V$$

a důkaz je hotov.

9. Souvislost

Snad první topologický pojem, se kterým se člověk ve svém životě seznamuje, je souvislost. Nesouvislý objekt si obvykle představujeme jako takový, který je složen ze dvou nezávislých kusů. V topologii má definice souvislosti následující podobu:

Definice. Topologický prostor je *nesouvislý*, jestliže je sjednocením disjunktních neprázdných otevřených podmnožin $A, B \subset X$, jinak je *souvislý*.

Přechodem k doplňkům snadno dostaneme

Tvrzení. *Topologický prostor je nesouvislý právě tehdy, když je sjednocením disjunktních neprázdných uzavřených podmnožin $A, B \subset X$.*

Existují další možné charakterizace (ne)souvislých množin:

Cvičení. Dokažte, že topologický prostor je nesouvislý právě tehdy, když existuje spojité surjektivní zobrazení $X \longrightarrow 2$, kde 2 je dvoubodový diskrétní prostor.

Cvičení. Buď X topologický prostor. Podmnožina $A \subseteq X$, která je jak otevřená, tak uzavřená, se nazývá *obojetná*. Dokažte, že topologický prostor X je nesouvislý právě tehdy, když obsahuje obojetnou množinu různou od $\emptyset$ a X.

Tvrzení. *Intervaly jsou souvislé množiny.*

Důkaz. Buď I interval. Připusťme, že je nesouvislý, a tedy je sjednocením disjunktních neprázdných uzavřených podmnožin A, B. Vyberme libovolné body $a \in A$ a $b \in B$, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b$. Označme I' uzavřený interval $[a, b] = \{x \in I \mid a \leq x \leq b\}$. Množiny $A' = A \cap I'$ a $B' = B \cap I'$ jsou neprázdné, protože $a \in A'$ $b \in B'$, a tedy $I' = A' \cup B'$ je rozklad na neprázdné uzavřené podmnožiny, který je pak rovněž nesouvislý. Tím jsme problém zredukovali na speciální případ, kdy I je uzavřený interval $[a, b]$ s rozkladem $I = A \cup B$ na neprázdné uzavřené podmnožiny takové, že $a \in A$ a $b \in B$.

Množina $A \subset I$ je neprázdná a ohraničená podmnožina přímky, a proto má supremum $s = \sup S$. Přitom $a \leq s \leq b$, načež $s \in I$. Z definice suprema snadno plyne, že $s \in \bar{A} = A$. Potom $s \notin B$, speciálně $s \neq b$. Otevřený interval (s, b) však celý leží v B, a proto $[s, b] \subseteq \bar{B} = B$. Speciálně $s \in B$, což je spor.

Tvrzení. *Buďte X_i souvislé podprostory topologického prostoru X, které mají společný bod $a \in \bigcap_{i \in I} X_i$. Pak je sjednocení $\bigcup_{i \in I} X_i$ souvislý podprostor.*

Důkaz. Připusťme, že sjednocení $\bigcup_{i \in I} X_i$ je nesouvislé. Buďte U, V neprázdné disjunktni otevřené podmnožiny v $\bigcup_{i \in I} X_i$ takové, že $U \cup V = \bigcup_{i \in I} X_i$. Jedna z nich, řekněme U, jistě obsahuje společný bod a. I druhá množina V je neprázdná, a proto obsahuje nějaký bod $b \in X_i$ pro některé $i \in I$. Pak jsou $U \cap X_i$ a $V \cap X_i$ neprázdné a disjunktní otevřené podmnožiny v X_i a platí $(U \cap X_i) \cup (V \cap X_i) = (U \cup V) \cap X_i = X_i$, spor.

Definice. Buď X topologický prostor a $a \in X$ bod. *Souvislá komponenta* C_a bodu a je sjednocení všech souvislých podmnožin v X, které obsahují a.

Jak název napovídá, každá souvislá komponenta je souvislá, což bezprostředně plyne z předchozího tvrzení.

Každý topologický prostor je disjunktním sjednocením svých souvislých komponent:

Tvrzení. *Systém souvislých komponent $\{C_a\}_{a \in X}$ tvoří rozklad prostoru X.*

Důkaz. Protínají-li se souvislé komponenty C_a a C_b, pak jsou si rovny. Dokažte jako cvičení.

Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý:

Tvrzení. *Je-li X souvislý prostor a $f : X \longrightarrow Y$ spojité zobrazení, pak je obraz fX souvislý.*

Důkaz. Připusťme, že fX není souvislý. Pak existují disjunktní otevřené podmnožiny U, V v fX takové, že $U \cup V = fX$, načež $f^{-1}U$, $f^{-1}V$ jsou disjunktní otevřené podmnožiny v X jejichž sjednocením je X, což je spor.

Tvrzení. *Součin souvislých prostorů je souvislý.*

Důkaz. Tvrzení platí pro obecné součiny, ale dokážeme je jen v případě dvou součinitelů X, Y. Buďte X, Y souvislé. Je-li $X = \emptyset$, pak i $X \times Y = \emptyset$ a je souvislý. Je-li X neprázdný, $a \in X$, pak je součin $X \times Y$ sjednocením souvislých množin $(\{a\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$, kde b probíhá Y a kterýkoliv z bodů (a, b) je jejich společným bodem. Sjednocení $X \times Y$ je potom rovněž souvislé.

Suma ani podprostor souvislých prostorů ovšem nemusí být souvislé.

10. Oblouková souvislost

Definice. Řekneme, že topologický prostor je *obloukově souvislý*, jestliže pro každé dva body $a, b \in X$ existuje spojité zobrazení $k : [0,1] \longrightarrow X$ takové, že $k(0) = a$ a $k(1) = b$.

Tvrzení. *Každý obloukově souvislý prostor je souvislý.*

Důkaz. Cvičení.

11. Kompaktnost

Kompaktnost je topologickým zobecněním konečnosti. Kompaktní množiny se v mnoha ohledech chovají jako konečné množiny. Dnes se užívá definice pomocí otevřených pokrytí.

Pokrytí topologického prostoru X je systém množin $\mathcal{A}$ takový, že $X = \bigcup \mathcal{A}$. *Otevřené pokrytí* je pokrytí otevřenými množinami. *Podpokrytí* pokrytí $\mathcal{A}$ je podsystém v $\mathcal{A}$, který je sám pokrytím.

Definice. Topologický prostor se nazývá *kompaktní*, jestliže v každém jeho otevřeném pokrytí existuje konečné podpokrytí.

Příklad. Každý konečný topologický prostor je kompaktní (včetně prázdného prostoru). Každý prostor X mající jen konečně mnoho otevřených množin je kompaktní (např. antidiskrétní prostor).

Obecně řečeno je snazší dokazovat nekompaktnost než kompaktnost. Stačí najít otevřené pokrytí, jehož žádný konečný podsystém není pokrytím:

Cvičení. Dokažte, že nekonečný diskrétní prostor není kompaktní.

Cvičení. Dokažte, že otevřený interval $(0, 1)$ není kompaktní.
Návod: Pokryjte jej otevřenými intervaly $(1/n, 1 - 1/n)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$

Pojmy pokrytí a kompaktnost se hodí i na podmnožiny topologického prostoru X. Systém $\mathcal{U}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá *pokrytí podmnožiny* $A \subseteq X$, jestliže $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Podpokrytí se definuje zřejmým způsobem. Podmnožina $A \subseteq X$ topologického prostoru X se nazývá *kompatní*, jestliže ke každému jejímu pokrytí existuje konečné podpokrytí.

Naštěstí je kompaktnost podmnožiny ekvivalentní kompaktnosti odpovídajícího podprostoru.

Lemma. *Podmnožina $A \subseteq X$ topologického prostoru X je kompaktní právě tehdy, když je podprostor A kompaktní.*

Důkaz. Buď A kompaktní podmnožina, buď $\{U_i\}_{i \in I}$ otevřené pokrytí podprostoru A. Podle definice topologie podprostoru ke každé množině U_i existuje otevřená množina $V_i \subseteq X$ taková, že $U_i = A \cap V_i$. Dostáváme systém otevřených podmnožin $\{V_i\}_{i \in I}$ v X, který pokrývá podmnožinu A. Existuje tedy konečné podpokrytí $\{V_i\}_{i \in K}$ množiny A. Potom však je $\bigcup_{i \in K} U_i = \bigcup_{i \in K} (A \cap V_i) = A \cap \bigcup_{i \in K} V_i$ pokrytím prostoru A. Důkaz opačné implikace je podobně snadný.

Tvrzení. *Uzavřená podmnožina $A \subseteq X$ kompaktního topologického prostoru X je kompaktní.*

Důkaz. Nechť je A uzavřená a $\mathcal{U}$ je její otevřené pokrytí. Pak je $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ otevřené pokrytí prostoru X, z nějž lze vybrat konečné. To bude současně pokrytím podmnožiny A.

V reálné analýze je známa Heine–Borelova věta, která praví, že podmnožina v $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a ohraničená. Následující tvrzení je základem pro důkaz Heine–Borelovy věty v dimenzi 1.

Tvrzení. *Uzavřené intervaly v $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.*

Důkaz. Buď $[a, b] \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, buď $\mathcal{U}$ jeho otevřené pokrytí. Označme S množinu všech bodů $t \in [a, b]$ takových, že interval $[a, t]$ je pokryt nějakým konečným podsystémem $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Zřejmě $a \in S$ a $S \subseteq [a, b]$, takže S je neprázdná a ohraničená podmnožina přímky $\mathbb{R}$, a proto má supremum. Označme je $s = \sup S$.

Supremum s rovněž leží v $[a, b]$ a proto i v některé množině U systému $\mathcal{U}$. Protože U je otevřená, existuje $\delta > 0$ takové, že okolí $(s - \delta, s + \delta)$ leží v U. Protože $s - \delta < s$, existuje $t \in S$ takové, že $t > s - \delta$ (jinak by totiž $s - \delta$ byla horní závora množiny S a muselo by platit $s \leq s - \delta$). Protože $t \in S$, leží v některém konečném podsystému $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Pak ovšem s leží ve sjednocení $U \cup \bigcup \mathcal{V}$, a proto $s \in S$ (nakreslete si obrázek). Pokud $s < b$, pak ve stejném sjednocení $U \cup \bigcup \mathcal{V}$, potažmo i v S, leží i $s + \frac{1}{2}\delta > s$. To je spor, a proto $s = b$. Tudíž, $b \in S$.

Tvrzení. *Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní.*

Důkaz. Buďte X, Y topologické prostory a $f : X \longrightarrow Y$ spojité zobrazení. Buď X kompaktní. Ukažme, že obraz fX je rovněž kompaktní. Buď tedy $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ otevřené pokrytí podmnožiny $fX \subseteq Y$. Systém $\{f^{-1}U_i\}_{i \in I}$ je otevřené pokrytí prostoru X. Proto existuje konečné podpokrytí $\{f^{-1}U_i\}_{i \in K}$. Snadno se ukáže, že $\{U_i\}_{i \in K}$ je pokrytí množiny fX (cvičení).

Tvrzení. *Součin $X \times Y$ a suma $X + Y$ kompaktních prostorů X, Y je kompaktní prostor.*

Důkaz. Buďte X, Y kompaktní prostory. Buď $\mathcal{W}$ otevřené pokrytí součinu $X \times Y$. Ke každému bodu $(x, y) \in X \times Y$ existuje jeho okolí $W_{(x,y)} \in \mathcal{W}$. Pak ovšem existují otevřené množiny $U_{(x,y)}$ v X a $V_{(x,y)}$ v Y takové, že $(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq W_{(x,y)}$.

Pro pevně zvolené $x \in X$ tvoří množiny $V_{(x,y)}$ otevřené pokrytí kompaktního prostoru Y. Nechť $V_{(x,y_1(x))} \cup \cdots \cup V_{(x,y_{r(x)}(x))} = Y$ je nějaké konečné podpokrytí. Označme $U_x = U_{(x,y_1(x))} \cap \cdots \cap U_{(x,y_{r(x)}(x))}$. To je otevřená množina obsahující x, načež množiny $U_x \times V_{(x,y_1(x))}, \ldots, U_x \times V_{(x,y_{r(x)}(x))}$ pokrývají podmnožinu $U_x \times Y$.

Současně však množiny U_x tvoří pokrytí prostoru X, z nějž můžeme vybrat konečné podpokrytí $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_r} = X$. Množiny $U_{x_i} \times V_{y_j(x_i)}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, r(x_i)$, pak pokrývají součin $X \times Y$.

Jak se kompaktnost formuluje pomocí uzavřených množin? Systém otevřených množin $\mathcal{U}$ je pokrytí prostoru X právě tehdy, když duální systém uzavřených množin $\mathcal{U}' = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}$ má prázdný průnik. Plyne to okamžitě z identity $X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i)$.

Definice. Systém podmnožin mnpžiny X se nazývá *centrovaný*, jestliže každý jeho konečný podsystém má neprázdný průnik.

Tvrzení. *Topologický prostor X je kompaktní právě tehdy, když v něm má každý centrovaný systém uzavřených množin neprázdný průnik.*

Důkaz. Buď X kompaktní. Buď $\mathcal{A}$ centrovaný systém uzavřených podmnožin v X. Připusťme, že má prázdný průnik. Pak je duální systém $\mathcal{A}' = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$ otevřené pokrytí prostoru X, má tedy konečné podpokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}'$. Duální systém $\mathcal{V}'$ je potom konečný podsystém v $\mathcal{A}$, který má prázdný průnik ve sporu s tím, že $\mathcal{A}$ je centrovaný.

Opačná implikace je nyní snadným cvičením (dokazuje se opět sporem).

12. Oddělovací axiomy

Velmi populární v topologii jsou oddělovací axiomy T_i, které se vzrůstajícím i stále více a více zužují třídu topologických prostorů je splňující. Platí totiž $T_i \Rightarrow T_j$ pro $i > j$.

Axiom $\mathbf{T_0}$. Topologický prostor X splňuje axiom T_0, jestliže ke každým dvěma různým bodům $x, y \in X$ existuje otevřená množina, která obsahuje právě jeden z nich.

Neformálně řečeno, prostor je T_0, jestliže v něm lze rozlišit jednotlivé body pomocí topologie (v opačném případě totiž všechny otevřené množiny obsahují buď oba body nebo žádný).

Příklad: Indiskrétní topologie na alespoň dvouprvkové množině není T_0.

Axiom $\mathbf{T_1}$. Topologický prostor X splňuje axiom T_1, jestliže ke každým dvěma různým bodům $x, y \in X$ existuje otevřená množina, která obsahuje x a neobsahuje y.

Prostor je T_1 právě tehdy, když jsou všechny jeho jednoprvkové podmnožiny uzavřené (říkáme, že prostor má ,,uzavřené body").

Příklad: Dvoubodový prostor $A = \{0, 1\}$, jehož otevřené množiny jsou $\emptyset$, $\{0\}$ a A, je T_0, ale není T_1.

Axiom $\mathbf{T_2}$. Topologický prostor X splňuje axiom T_2, jestliže ke každým dvěma různým bodům $x, y \in X$ existují otevřené množiny U, V takové, že $x \in U$, $y \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. Nazývá se též *Hausdorffův* prostor.

Příklad: Libovolná nekonečná množina s topologií konečných doplňků je T_1, ale není T_2.

Axiom $\mathbf{T_3}$. Topologický prostor X splňuje axiom T_3, jestliže splňuje T_1 a ke každému bodu $x \in X$ a uzavřené množině $A \subseteq X$ jej neobsahující existují otevřené množiny U, V takové, že $x \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Nazývá se též *regulární* prostor.

Příklad: Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel s topologií $\mathcal{Z}$, jejíž otevřené množiny jsou právě sjednocení $U\cup(V\setminus\mathbb{Q})$, kde U a V jsou otevřené množiny v obvyklé topologii přímky na $\mathbb{R}$. Snadno se ověří, že $\mathcal{Z}$ je topologie, a že splňuje axiom T_2. Ovšem množina $\mathbb{Q}$ je uzavřená ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\in\mathcal{Z}$), ale s žádným bodem $x\notin\mathbb{Q}$ nemá disjuntní okolí. Je-li totiž U otevřené okolí iracionálního bodu x, pak obsahuje podmnožinu tvaru $(x-h,x+h)\setminus\mathbb{Q}$; vyberme libovolně $y\in(x-h,x+h)\cap\mathbb{Q}$, což je bod množiny $\mathbb{Q}$ a proto libovolná otevřená množina $V\supseteq\mathbb{Q}$ obsahuje i nějaké jeho okolí $(y-k,y+k)\setminus\mathbb{Q}$, které však má neprázdný průnik s U.

Axiom $\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$. Topologický prostor X splňuje axiom $T_{3\frac{1}{2}}$, jestliže splňuje T_1 a ke každému bodu $x\in X$ a uzavřené množině $A\subseteq X$ jej neobsahující existuje spojitá funkce $f:X\longrightarrow I$, kde I je interval $[0,1]$ taková, že $f(x)=0$ a $fA=\{1\}$. Nazývá se též *úplně regulární* neboli *Tichonovův* prostor.

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor splňuje T_3; stačí volit $U=f^{-1}[0,\frac{1}{3})$ a $V=f^{-1}(\frac{2}{3},1]$. Existují T_3-prostory, které nesplňují axiom $T_{3\frac{1}{2}}$, ale jejich konstrukce jsou dosti netriviální.

Axiom $\mathbf{T_4}$. Topologický prostor X splňuje axiom T_4, jestliže splňuje T_1 a ke každým dvěma disjunktním uzavřeným množinám $A,B\subseteq X$ existují otevřené množiny U,V takové, že $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ a $U\cap V=\emptyset$. Nazývá se též *normální* prostor.

Požadavek, aby T_j prostor, $j\geq 3$, byl T_1, je hlavně estetické povahy – bez něj by z axiomu T_j nevyplýval axiom T_1.

13. Hausdorffovy prostory

Tvrzení. *Buď f,g dvojice spojitých zobrazení z prostoru X do Hausdorffova prostoru Y. Pak je $E_{f,g}=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$ uzavřená podmnožina v X.*

Důkaz. Ukažme, že doplněk k $E_{f,g}$, tj. množina $E'_{f,g}=\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}$, je otevřená. Pro libovolný bod $x\in E'_{f,g}$ existují disjunktní okolí $U\ni f(x)$ a $V\ni g(x)$ v Y. Potom je $W=f^{-1}U\cap g^{-1}V$ okolí bodu x, které celé leží v $E'_{f,g}$.

Množina $E_{f,g}$ se nazývá *ekvalizátor* spojitých zobrazení f,g.

Důsledek. *Jestliže dvě spojitá zobrazení f,g z prostoru X do Hausdorffova prostoru Y splývají na husté podmnožině, pak $f=g$.*

Tvrzení. *Podprostor Hausdorffova prostoru X je Hausdorffův prostor. Součin Hausdorffových prostorů X_i je Hausdorffův prostor.*

Důkaz. Tvrzení o podprostorech je snadné cvičení. Dokažme tvrzení o součinech. Buďte $a,b\in\prod_{i\in I}X_i$ dva různé body. Pak existuje $i\in I$ takové, že $\mathrm{pr}_i(a)\neq\mathrm{pr}_i(b)$, a tedy jsou oddělitelné v X_i. Jsou-li $U,V\subset X_i$ příslušné oddělující množiny, stačí je vynásobit součinem $\prod_{j\neq i}X_j$ zbývajících součinitelů a obdržíme oddělující množiny pro a a b.

Kombinace kompaktnosti a hausdorffovosti umožňuje dokazovat velmi silná tvrzení.

Tvrzení. *Buď X Hausdorffův prostor, buď $A\subseteq X$ kompaktní podmnožina, buď $b\notin A$ bod. Pak existují disjunktní otevřené množiny $U\supseteq A$ a $V\ni b$.*

Důkaz. Pro libovolný bod $a\in A$ existují disjunktní otevřené množiny $U_a\ni a$ a $V_a\ni b$. Z pokrytí $A\subseteq\bigcup_{a\in A}U_a$ kompaktní množiny A lze vybrat konečné podpokrytí $A\subseteq\bigcup_{a\in K}U_a$. Sjednocení $\bigcup_{a\in K}U_a$ a průnik $\bigcap_{a\in K}V_a$ jsou hledané disjunktní otevřené množiny.

Důsledek. *Kompaktní podmnožina Hausdorffova prostoru je uzavřená.*

Důkaz. Každý bod vně množiny A má podle předchozího tvrzení okolí ležící vně množiny A.

Tvrzení. *Je-li X kompaktní a Y Hausdorffův topologický prostor a $f : X \longrightarrow Y$ spojité zobrazení, pak obrazem libovolné uzavřené podmnožiny $A \subseteq X$ je uzavřená množina $fA \subseteq Y$.*

Zobrazení f s vlastností uvedenou v závěru tvrzení se nazývá *uzavřené*.

Důkaz. Uzavřená podmnožina $A \subseteq X$ kompaktního prostoru X je kompaktní. Obraz $fA \subseteq Y$ je potom kompaktní podmnožina Hausdorffova prostoru, a tedy uzavřená.

Důsledek. *Buď X kompaktní a Y Hausdorffův topologický prostor, buď $f : X \longrightarrow Y$ spojité bijektivní zobrazení. Pak f je homeomorfismus.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je f uzavřené, a proto je f^{-1} spojité.

Tvrzení. *Buď X kompaktní a Y Hausdorffův topologický prostor, buď $f : X \longrightarrow Y$ spojité zobrazení. Nechť $\equiv$ je relace ekvivalence $x \equiv y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Pak je faktorový prostor $X/\equiv$ homeomorfní obrazu $fX \subseteq Y$.*

Důkaz. Zobrazení $f^{\#} : X/\equiv \longrightarrow fX$ zadané předpisem $[x]_{\equiv} \longmapsto f(x)$ je bijektivní a spojité. Faktorový prostor $X/\equiv$ je kompaktní a obraz $fX \subseteq Y$ je Hausdorffův.

Příklad. Zobrazme uzavřený interval $[0, 1]$ na kružnici $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ předpisem $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Zobrazení f je spojité a surjektivní zobrazení kompaktního prostoru na Hausdorffův. Tudíž, $f^{\#}$ je homeomorfismus mezi $[0, 1]/\equiv_f$ a S^1. Přitom relace $\equiv_f$ ztotožňuje jen koncové body 0 a 1, ostatní ponechává. Odtud závěr, že ztotožněním koncových bodů uzavřeného intervalu obdržíme kružnici.

Heine–Borelova věta. *Podmnožina v $\mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Ohraničenost množiny A znamená, že existuje interval $[a, b]$ takový, že $A \subseteq [a, b]^n$.

14. Jednobodová kompaktifikace

Aleksandrov ukázal, že libovolný topologický prostor X lze rozšířit o jediný bod tak, aby vznikl kompaktní prostor. Postup je pozoruhodně jednoduchý. Nechť bod $\bullet$ nepatří do X. Položme $X^\bullet = X \cup \{\bullet\}$. Otevřené podmnožiny $U \subseteq X^\bullet$ zavedeme pravidly:

1. Je-li $\bullet \in U$, pak U je otevřená v $X^\bullet$ právě tehdy, když $X \setminus U$ je kompaktní a uzavřená v X;
2. je-li $\bullet \notin U$, pak U je otevřená v $X^\bullet$ právě tehdy, když je otevřená v X.

Tvrzení. *$X^\bullet$ je kompaktní topologický prostor.*

Důkaz. Množina $X^\bullet$ je otevřená podle prvního pravidla ($\emptyset$ je kompaktní), prázdná množina je otevřená podle druhého pravidla.

Buďte U, V otevřené množiny. Ukažme, že $U \cap V$ je otevřená.

– Je-li $\bullet \in U$ i $\bullet \in V$, pak $U \cap V \ni \bullet$ posuzujeme podle prvního pravidla. Přitom $X \setminus U$ i $X \setminus V$ jsou kompaktní, a proto $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ je zřejmě též kompaktní, načež $U \cap V$ je otevřená.

– Je-li $\bullet \in U$, ale $\bullet \notin V$, pak $U \cap V \not\ni \bullet$ a posuzujeme ji podle druhého pravidla. Ovšem $X \setminus U$ je uzavřená a $V \subset X$ je otevřená, načež $U \cap V = V \setminus (X \setminus U)$ je otevřená v X, a tedy i v $X^\bullet$.

– Je-li $\bullet \notin U$ i $\bullet \notin V$, pak $U \cap V \not\ni \bullet$ a posuzujeme ji opět podle druhého pravidla. Protože $U, V \subset X$ jsou otevřené, je i $U \cap V$ otevřená v X, potažmo v $X^\bullet$.

Buďte U_i, $i \in I$, otevřené množiny. Ukažme, že $\bigcup_{i \in I} U_i$ je otevřená množina. Buď $\{U_i\}_{i \in I^{(1)}}$ podsystém množin obsahujících $\bullet$ (a tedy otevřených podle prvního pravidla) a $\{U_i\}_{i \in I^{(2)}}$ podsystém množin neobsahujících $\bullet$ (a tedy otevřených podle druhého pravidla).

– Je-li $I^{(1)} = \emptyset$, pak $I = I^{(2)}$ a všechny množiny jsou otevřené podle druhého pravidla, tedy U_i jsou otevřené v X. Potom $\bigcup U_i \not\ni \bullet$ je rovněž otevřená v X, potažmo v $X^\bullet$.

– Je-li $I^{(2)} = \emptyset$, pak $I = I^{(1)}$ a všechny množiny jsou otevřené podle prvního pravidla, tedy $X \setminus U_i$ jsou kompaktní a uzavřené v X. Pak je $X \setminus \bigcup U_i = \bigcap (X \setminus U_i)$ uzavřená a kompaktní, načež $\bigcup U_i \ni \bullet$ je otevřená podle prvního pravidla.

– Jsou-li obě indexové množiny $I^{(1)}, I^{(2)}$ neprázdné, pak je podle již dokázaných případů $\bigcup_{i \in I} U_i$ sjednocením dvou otevřených množin $U^{(1)} = \bigcup_{i \in I^{(1)}} U_i$ a $U^{(2)} = \bigcup_{i \in I^{(2)}} U_i$, z nichž první obsahuje $\bullet$ a druhá nikoliv. Tudíž $X \setminus U^{(1)}$ je kompaktní a uzavřená v X, kdežto $U^{(1)} \subseteq X$ je otevřená. Množina $U^{(1)} \cup U^{(2)}$ obsahuje $\bullet$ a podle prvního pravidla posuzujeme $X \setminus (U^{(1)} \cup U^{(2)}) = (X \setminus U^{(1)}) \cap (X \setminus U^{(2)})$, což je průnik dvou uzavřených množin v X, z nichž jedna je kompaktní, a tedy jde o kompaktní množinu uzavřenou v X.

Zbývá ukázat, že $X^\bullet$ je kompaktní, což si laskavý čtenář dokáže sám jako cvičení.

Definice. Prostor $X^\bullet$ se nazývá *jednobodová kompaktifikace* prostoru X.

Cvičení. Ukažte, že jednobodová kompaktifikace $X^\bullet$ kompaktního prostoru X je sumou X a jednoprvkového prostoru $\{\bullet\}$.

Cvičení. Ukažte, že je-li X nekompaktní, pak je hustý ve své jednobodové kompaktifikaci $X^\bullet$.

15. Posloupnosti a první axiom spočetnosti

V libovolném topologickém prostoru lze zavést pojem konvergence posloupnosti k určité limitě. Posloupností bodů topologického prostoru X rozumíme libovolné zobrazení $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$, kde $\mathbb{N}$ je množina všech přirozených čísel. Obraz $x(i)$ se obvykle značí x_i. *Limita* takové posloupnosti x je bod $a \in X$ takový, že pro každé jeho okolí U existuje index n takový, že platí $x_i \in U$ pro všechny indexy $i \geq n$. Posloupnost x se nazývá *konvergentní* v prostoru X, má-li v prostoru X alespoň jednu limitu. Poznamenejme, že jedna a táž posloupnost může mít dvě různé limity – například v antidiskrétním topologickém prostoru je každý bod limitou každé posloupnosti. Zápis $a = \lim_{i \longrightarrow \infty} x_i$, obvyklý v matematické analýze, může vést k chybám; z $a = \lim_{i \longrightarrow \infty} x_i$ a $b = \lim_{i \longrightarrow \infty} x_i$ neplyne $a = b$). Budeme proto používat zápis $x_i \longrightarrow a$.

Tvrzení. *V Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Buďte a, b limity jedné a téže posloupnosti v Hausdorffově propstoru X. Jsou-li a, b různé, pak mají disjunktní okolí U, V. Od jistého indexu počínaje leží všechny body posloupnosti jak v U, tak ve V, což je spor.

Definice. *Spočetná lokální báze* v bodě $x \in X$ je posloupnost oteřených okolí $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ taková, že libovolné otevřené okolí $V \ni x$ obsahuje alespoň jednu z množin U_i.

Bez újmy na obecnosti lze požadovat, aby okolí U_i byla do sebe vložená: $U_{i+1} \subseteq U_i$ pro každé i. Můžeme toho totiž vždy dosáhnout přechodem k posloupnosti průniků U_1, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_2 \cap U_3, \ldots$

Definice. Řekneme, že topologický prostor X splňuje *první axiom spočetnosti*, má-li každý bod spočetnou lokální bázi.

První axiom spočetnosti zaručuje, že topologii můžeme zrekonstruovat z konvergence posloupností.

Tvrzení. *Nechť topologický prostor X splňuje první axiom spočetnosti. Buď $A \subseteq X$ libovolná podmnožina. Pak $a \in \bar{A}$ tehdy a jen tehdy, když a je limitou některé posloupnosti bodů $x_i \in A$.*

Důkaz. Je-li $a \in X$ limitou některé posloupnosti bodů $x_i \in A$, pak $a \in \bar{A}$, protože každé okolí bodu a obsahuje alespoň jeden bod z A. K tomu není potřeba žádný axiom spočetnosti.

Je-li $a \in \bar{A}$, pak každé $i \in \mathbb{N}$ element U_i lokální báze bodu a obsahuje alespoň jeden bod x_i z A. Jak již víme, lze požadovat, aby $U_{i+1} \subseteq U_i$. Pak ovšem posloupnosti x_i konverguje k a.

16. Metrické prostory

Definice. *Metrický prostor* je množina M spolu s metrikou. *Metrika* na M je zobrazení $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, splňující následující axiomy:

$$d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad \text{rovnost nerozlišitelných bodů,}$$

$$d(x,y) = d(y,x) \qquad \text{symetrie,}$$

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \qquad \text{trojúhelníková nerovnost.}$$

Příklad. Eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^n$ je dána vztahem

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i (y_i - x_i)^2},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Tvrzení. *Pro libovolné body x, y metrického prostoru (M,d) platí $d(x,y) \geq 0$.*

Důkaz. $2d(x,y) = d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x) = 0$.

Definice. Buď (M,d) metrický prostor. Množina $B(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}$, kde $a \in M$ a r je kladné reálné číslo, se nazývá *otevřená koule* se středem a a poloměrem r.

Otevřené koule v metrickém prostoru (X,d) tvoří bázi jisté topologie na X. Nazývá se *topologie indukovaná metrikou.* Není-li řečeno jinak, na metrickém prostoru se zavádí právě tato topologie.

Tvrzení. *Každý metrický prostor splňuje první axiom spočetnosti.*

Důkaz. Otevřené koule se středem a a racionálními poloměry tvoří bázi okolí bodu a.

Tvrzení. *V metrickém prostoru (X,d) platí: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$, kde $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$.*

Důkaz. Cvičení.

Tvrzení. *Každý metrický prostor je Hausdorffův.*

Důkaz. Cvičení.

Později dokážeme, že každý metrický prostor je normální.

Tvrzení. *Každá uzavřená podmnožina A metrického prostoru X je množinou nulových bodů spojité funkce $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definované předpisem $f(x) = d(x, A)$.*

Důkaz. Cvičení.

17. Úplnost

Definice. Buď (M, d) metrický prostor. Posloupnost bodů $x_i \in M$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže pro každé kladné reálné číslo ϵ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $d(x_i, x_j) < \epsilon$ pro včechna $i, j \geq n$.

Například každá konvergentní posloupnost je cauchyovská, jak snadno plyne z trojúhelníkové nerovnosti.

18. Banachova věta o pevném bodu

Definice. Zobrazení $f : M \longrightarrow N$ metrických prostorů (M, d_M) a (N, d_N) se nazývá *lipschitzovské*, jestliže existuje reálné číslo $K > 0$ (*Lipschitzovo číslo*) takové, že platí $d_N(f(x), f(y)) \leq K d_M(x, y)$. V případě $K < 1$ říkáme, že f je *kontraktivní* zobrazení, zkráceně *kontrakce*.

Tvrzení. *Kontraktivní zobrazení úplného metrického prostoru na sebe má pevný bod. Tento pevný bod je jediný.*

Důkaz. Buď (M, d) úplný metrický prostor a $f : M \longrightarrow M$ kontraktivní zobrazení s Lipschitzovým číslem $K < 1$. Pro libovolné $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq K d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq \cdots \leq K^n d(x, f(x))$. Z trojúhelníkové nerovnosti pak pro každé $m \in \mathbb{N}$ dostáváme $d(f^n(x), f^m(x)) \leq (K^n + K^{n+1} + \cdots + K^m) d(x, f(x)) \leq (K^n/(1-K)) d(x, f(x))$. Vidíme, že při libovolném x je posloupnost $x, f(x), f^2(x), \ldots$ cauchyovská, a tedy konvergentní. Její limita $a \in X$ splňuje $d(a, f(a)) < \epsilon$ pro každé ϵ, a tedy $a = f(a)$ je pevným bodem zobrazení f.

19. Stejnoměrná spojitost

Definice. Buďte (M, d_M), (N, d_N) metrické prostory. Zobrazení $f : M \longrightarrow N$ se nazývá *stejnoměrně spojité*, pokud ke každému reálnému $\epsilon > 0$ existuje reálné $\delta > 0$ takové, že kdykoliv $d_M(x, y) < \delta$, pak $d_N(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Tvrzení. *Stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.*

Důkaz. Cvičení.

Příklad. Zobrazení $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definované předpisem $f(x) = x^2$, je spojité ale nikoliv stejnoměrně spojité.

Heine–Cantorova věta. *Je-li $f : M \longrightarrow N$ spojité zobrazení metrických prostorů, přičemž M je kompaktní, pak je f stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Cvičení.

Tvrzení. *Obrazem cauchyovské posloupnosti při stejnoměrně spojitém zobrazení je opět cauchyovská posloupnost.*

Důkaz. Cvičení.

20. Normální prostory

Pavel Samuilovič Urysohn (1898–1924).

Urysohnovo lemma. *Buďte A, B disjunktní uzavřené podmnožiny normálního topologického prostoru X. Pak existuje spojitá funkce $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ taková, že $f|_A = 0$ a $f|_B = 1$.*

Důkaz. ...

21. Parakompaktní prostory

Parakompaktnost je topologická vlastnost, běžně vyžadovaná v aplikacích.

Definice. Otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ topologického prostoru X se nazývá *lokálně konečné*, jestliže každý bod $x \in X$ má okolí V, které protíná jen konečně mnoho množin systému $\mathcal{U}$, tj. množina $\{i \in I \mid U_i \cap V \neq \emptyset\}$ je konečná.

Zjemnění otevřeného pokrytí $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ prostoru X je otevřené pokrytí $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ prostoru X takové, že ke každému $j \in J$ existuje $i \in I$ takové, že $V_j \subseteq U_i$.

Topologický prostor X je *parakompaktní*, má-li každé jeho otevřené pokrytí lokálně konečné zjemnění.

Stoneova věta (A.H. Stone). *Každý metrický prostor je parakompaktní.*

Důkaz. M.E. Rudin, A new proof that metric spaces are paracompact, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969) 603.

Nyní zavedeme lokální kompaktnost jako vlastnost topologického prostoru vyjadřující, že je lokálně stejný jako nějaký jeho kompaktní podprostor.

Definice. Topologický prostor X se nazývá *lokálně kompaktní*, jestliže každý jeho bod má okolí U s kompaktním uzávěrem $\bar{U} \subseteq X$.

Tvrzení. *Každý lokálně kompaktní prostor se spočetnou bazí je parakompaktní.*

Důkaz. Buď X topologický prostor se spočetnou bází $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, pokrytý otevřenými množinami U_j, $j \in J$, s kompaktními uzávěry $\bar{U}_j$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že každá bázová množina B_k leží v některé množině U_j, načež $\bar{B}_k \subseteq \bar{U}_j$ jsou kompaktní.

Nejprve zkonstruujme spočetné pokrytí $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ prostoru X kompaktními množinami K_i takovými, že $K_i \subseteq K_{i+1}^\circ$. Položme $K_1 = \bar{B}_1$, což je kompaktní množina. Pro každé další $i > 1$ nechť $K_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \bar{B}_j$, kde $m_i \geq i$ je nějaké přirozené číslo takové, že $K_{i-1} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} B_j$; takové číslo m_i existuje, protože bázové množiny B_j tvoří otevřené pokrytí kompaktní množiny K_{i-1}. Množina K_i je konečné sjednocení kompaktních množin, a proto je kompaktní. Nakonec platí $K_{i-1} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} B_j \subseteq K_i$. Protože $\bigcup_{j=1}^{m_i} B_j$ je otevřená množina, máme dokonce $K_{i-1} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} B_j \subseteq K_i^\circ$. Protože jsme požadovali $m_i \geq i$, platí $K_i \supset B_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, a tudíž množiny K_i tvoří spočetné pokrytí prostoru X.

Buď nyní $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, libovolné otevřené pokrytí prostoru X. Zkonstruujme lokálně konečné otevřené pokrytí $\mathcal{W}$ vepsané do pokrytí $\mathcal{U}$.

Počáteční krok: Množina K_1 je kompaktní, a proto lze z jejího pokrytí $\mathcal{U}$ vybrat konečné podpokrytí $U_{\lambda_1^1}, \ldots, U_{\lambda_{k_1}^1}$. Položme

$$\Gamma_1 = \{\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{k_1}^1\} \subseteq \Lambda \quad \text{a} \quad W_{1\gamma} = U_\gamma$$

pro každé $\gamma \in \Gamma_1$.

Indukční krok: Pro každé $i > 1$ je množina K_i kompaktní a proto lze z jejího otevřeného pokrytí $\mathcal{U}$ vybrat konečné podpokrytí $U_{\lambda_1^i}, \ldots, U_{\lambda_{k_i}^i}$. Položme

$$\Gamma_i = \{\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{k_i}^i\} \subseteq \Lambda \quad \text{a} \quad W_{i\gamma} = U_\gamma \setminus K_{i-1}$$

pro každé $\gamma \in \Gamma_i$; vidíme, že $\{W_{i\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma_i}$ je konečné otevřené pokrytí množiny $K_i \setminus K_{i-1}$. Nakonec nechť $\mathcal{W}$ je sjednocení $\{W_{i\gamma}\}_{i\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma_i}$. Pak je $\mathcal{W}$ otevřené pokrytí prostoru X. Ukažme, že je lokálně konečné. Je-li $x \in X$ libovolný bod, pak $x \in K_i$ pro některé $i \in \mathbb{N}$, a tím spíše $x \in K_{i+1}^\circ$. Pak je K_{i+1}° otevřené okolí bodu x, které se neprotíná s množinami $W_{i+2,\gamma}, W_{i+3,\gamma}, \ldots$, a proto může mít neprázdný průnik pouze s množinami $W_{1,\gamma}, \ldots, W_{i+1,\gamma}$, kterých je jen konečně mnoho.

22. Parakompaktní Hausdorffovy prostory a rozklad jednotky

Tvrzení (J. Dieudonné). *Každý parakompaktní Hausdorffův prostor je normální.*

Důkaz. Nechť X splňuje axiom T_2. Ukažme nejprve, že splňuje i axiom T_3, tj. že je regulární.

Buďte A, B dvě disjunktní uzavřené podmnožiny parakompaktního prostoru X. Zvolme pevný bod $a \in A$. Podle axiomu T_2 pro každé $b \in B$ existují disjunktní otevřená okolí $U_{a,b}$ bodu a a $V_{a,b}$ bodu b. Dostáváme otevřené pokrytí $\{V_{a,b}\}_{b\in B}$ množiny B, načež je $\{X \setminus B\} \cup \{V_{a,b}\}_{b\in B}$ otevřené pokrytí parakompaktního prostoru X. Podle definice parakompaktnosti existuje lokálně konečné zjemnění uvedeného pokrytí; označme je $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$. Nechť $I_B = \{i \in I \mid W_i \cap B \neq \emptyset\}$. Označme $V := \bigcup_{i\in I_B} W_i$; to je sjednocení těch množin pokrytí $\mathcal{W}$, které mají neprázdný průnik s B. Zřejmě je V otevřená množina obsahující B. Označme dále $U := X \setminus \bigcup_{i\in I_B} \overline{W}_i = X \setminus \overline{\bigcup_{i\in I_B} W_i}$ (rovnost je důsledkem lokální konečnosti systému W_i); množina U je zřejmě otevřená. Navíc obsahuje bod a, což se snadno ukáže. Vskutku, pro každé $i \in I_B$ existuje $b \in B$ takové, že $W_i \subseteq V_{a,b} \subseteq X \setminus U_{a,b} \subseteq X \setminus \{a\}$, načež $\overline{W}_i \subseteq X \setminus \{a\}$. Nakonec je $U \cap V = \emptyset$, protože

$$U = X \setminus \bigcup_{i\in I_B} \overline{W}_i \subseteq X \setminus \bigcup_{i\in I_B} W_i = X \setminus V.$$

Tím je ukončen důkaz regularity prostoru X.

Nechť nyní X splňuje axiom T_3. Opakujeme-li slovo od slova předchozí důkaz regularity s tím, že všude bod $a \in A$ zaměníme množinou A, přičemž místo axiomu T_2 použijeme již dokázaný axiom T_3, dostaneme důkaz normality prostoru X.

Tvrzení. *Ke každému otevřenému pokrytí $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ parakompaktního Hausdorffova prostoru X existuje otevřené pokrytí $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ takové, že $\bar{V}_i \subseteq U_i$ pro každé $i \in I$.*

Důkaz. Pro každý bod $x \in X$ existuje $i \in I$ takové, že $x \in U_i$. Podle předchozí věty je prostor X regulární, a proto existuje otevřená množina W_x taková, že $x \in W_x \subseteq \overline{W}_x \subseteq U_i$ (protože W_x a $X \setminus \overline{W}_x$ oddělují bod x a uzavřenou množinu $X \setminus U_i$). Systém $\{W_x\}_{x \in X}$ je otevřeným pokrytím prostoru X; buď $\{Z_j\}_{j \in J}$ jeho lokálně konečné zjemnění. To znamená, že pro každé $j \in J$ existuje $x \in X$ takové, že $Z_j \subseteq W_x$, a potažmo $\bar{Z}_j \subseteq \overline{W}_x \subseteq U_i$. Označme

$$V_i = \bigcup \{Z_j \mid \bar{Z}_j \subseteq U_i\},$$

což je otevřená podmnožina v U_i. Pak je $\{V_i\}_{i \in I}$ otevřené pokrytí prostoru X a platí $\bar{V}_i = \overline{\bigcup Z_j} = \bigcup \overline{Z_j} \subseteq U_i$ (druhá rovnost plyne z toho, že pokrytí $\{Z_j\}$ je lokálně konečné).

Definice. Rozklad jednotky na topologickém prostoru X je soubor funkcí $\{h_i : X \longrightarrow [0,1]\}_{i \in I}$ takových, že

(i) ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí V takové, že $h_i|_V = 0$ pro všechna $i \in I$ s výjimkou konečně mnoha;

(ii) $$\sum_{i \in I} h_i = 1.$$

Rozklad jednotky $\{h_i : X \longrightarrow [0,1]\}_{i \in I}$ je podřízen otevřenému pokrytí $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ topologického prostoru X, jestliže

(iii) $\operatorname{supp} h_i \subseteq U_i$, kde $\operatorname{supp} h = \overline{\{x \in X \mid h(x) > 0\}}$.

Tvrzení. *Ke každému otevřenému pokrytí parakompaktního Hausdorffova prostoru X existuje podřízený rozklad jednotky.*

Důkaz. Buď $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ otevřené pokrytí prostoru X. Podle předchozího lemmatu existuje otevřené pokrytí $\{V_i\}_{i \in I}$ takové, že $\bar{V}_i \subseteq U_i$; z parakompaktnosti pak plyne, že existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j \in J}$ vepsané do pokrytí $\{V_i\}_{i \in I}$.

Buď W_j některá z otevřených množin pokrytí $\mathcal{W}$, vložená do některé z množin U_i. Pak existuje spojitá funkce $f_j : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$, kladná ve všech bodech množiny W_j a nulová jinak. Definujme funkci g_j na X předpisem

$$g_j|_{U_i} = f_j,$$
$$g_j|_{X \setminus U_i} = 0.$$

Vidíme, že $\operatorname{supp} g_j = \overline{W}_j \subseteq U_i$, a proto je g_j spojitá funkce $X \longrightarrow \mathbb{R}$. Navíc je systém $\{\operatorname{supp} g_j\}$ lokálně konečný, a proto je korektně definován součet $\sum_{j \in J} g_j$. Položme

$$h_j = \frac{g_j}{\sum_{j \in J} g_j}.$$

Funkce h_j jsou spojité a platí $\operatorname{supp} h_j = \operatorname{supp} g_j$ a

$$\sum_{j \in J} h_j = \frac{\sum\limits_{j \in J} g_j}{\sum\limits_{j \in J} g_j} = 1.$$

Tím je důkaz ukončen.