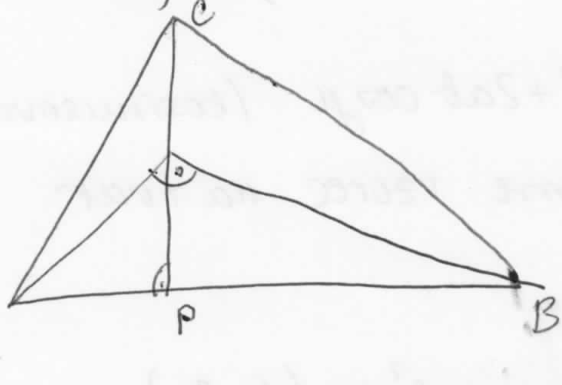
# MATEMATICKÉ BESEDY

12. 11. 2010

(1.) Nech $ABC$ je trojuholník s ostrým uhlom pri vrchole $C$ a nech $P$ je päta jeho výšky z $C$ na $AB$. Nech $D$ je bod polpriamky $PC$ taký, že $\sphericalangle ADB$ je pravý. Ukážte, že $D$ leží vnútri úsečky $PC$.

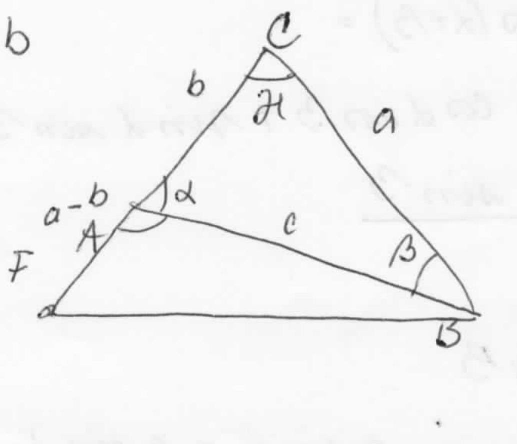



(2) Pre všeobecný trojuholník dokážte tzv. Mollweidov vzorec

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

Riešenie: Ak $a=b$ triviálne

Nech $a > b$




Zostrojím na polpriamke $\overrightarrow{CA}$ bod $F$ tak, aby $|FA| = a-b$

Potom $\triangle FCB$ je rovnoramenný, spočítam uhly:

$\sphericalangle BFC = \frac{180-\gamma}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$

$\sphericalangle FBA = 90 - \frac{\gamma}{2} - \beta = 90 - \left(\frac{180-\alpha-\beta}{2}\right) - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$

Použijem sínovú vetu pre $\triangle FAB$:

$$\frac{\sin\left(90-\frac{\gamma}{2}\right)}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{a-b} \Rightarrow \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Ak $a<b$ zamením v predchádzajúcom strany a a b.

(3) Pre ľubovolný $\triangle ABC$ dokážte rovnosť

$$2ab-(a^2+b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha-\beta)$$

Riešenie: $a^2+b^2=c^2+2ab\cos\gamma$ (kosínusová veta)

S jej využitím upravíme vzorec na tvar

~~držbu~~

$$2ab-(c^2+2ab\cos\gamma)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha-\beta)$$

$$2ab(1-\cos^2\gamma) = c^2[\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$2ab\sin^2\gamma = c^2(\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)]$$

Zo súčtových vzorcov upravíme

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos(180-\alpha-\beta) =$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos(\alpha+\beta) =$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta =$$

$$=2\sin\alpha\sin\beta$$

čiže máme

$$\cancel{2}ab\sin^2\gamma = \cancel{2}c^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\sin\gamma = c\sin\alpha \\ b\sin\gamma = c\sin\beta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} ab\sin^2\gamma = \\ c^2\sin\alpha\sin\beta \end{array}$$

HOTOVO!

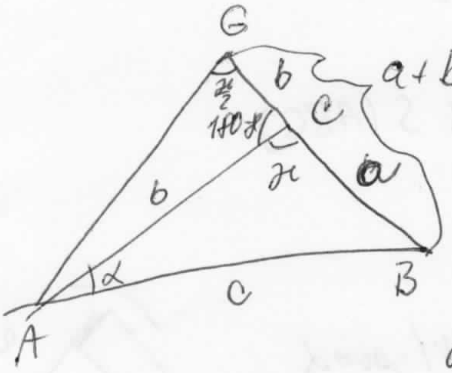
(4) Pre všeobecný trojuholník $ABC$ dokážte druhý Mollweidov vzorec

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{\gamma}{2}},$$

ktorý spolu s prvým Mollweidovým vzorcom vedie k rovnosti

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \quad \text{(tangensová veta)}$$

Riešenie: Podobne ako 1. Uvažujme $\triangle ABG$, taký, že $|BG| = a+b$, $G$ leží na polpriamke $\overrightarrow{BC}$.




Potom $\triangle ACG$ je rovnoramenný $\Rightarrow \measuredangle AGC = \frac{\gamma}{2}$, $\measuredangle BAG = \alpha + \frac{\gamma}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

a sínová veta pre $\triangle ABG$ nám dáva:

$$\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{c} = \frac{\sin\left(90+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{a+b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{a+b}$$

úpravou dostaneme druhý Mollweidov vzorec.

Prvý a druhý dokopy:

$$\cancel{\frac{a+b}{a+b}}\ \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mathrm{cotg}\left(\frac{180-\alpha-\beta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cancel{\mathrm{cotg}}\ \mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$S(ABC)$ je obsah $\triangle ABC$?

$\sin\alpha = \frac{v}{|AV|}$

$S(ABC) = \cancel{v} \frac{|AV|\cdot\sin\alpha}{2}$

$S(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$

$a^2 + b^2 \mp c^2 + 2ab\cos\gamma$

ináč

$\cancel{c^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma}$

$\cos\alpha = \frac{|AV|}{b}$

$\cancel{a^2+b^2}$ $a^2 + 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2$

$2a^2 + 2bc\cos\alpha \leq 4\sqrt{3}\, S(ABC)$

$2a^2 + 2bc\, \cancel{\cos} |AV| \leq 1$

$a^2 + 2c|AV| \leq \sqrt{3}\, |AV|\cdot\sin\alpha$

$(|AV| + |VB|)^2$

$|AV|^2 + 2|AV||VB| + |VB|^2 + 2c|AV| \leq \sqrt{3}\, |AV| \sin\alpha$

neviem?

$VB =$

cos

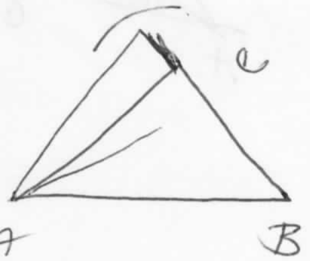
$c = |AV| + |VB|$

$2a^2 + 2bc\cos\alpha \leq 2\sqrt{3}\, ab \sin\gamma$

$a^2 + bc\cos\alpha \leq \sqrt{3}\, bc\, \cancel{\sin\gamma}\ \sin\alpha$ ?

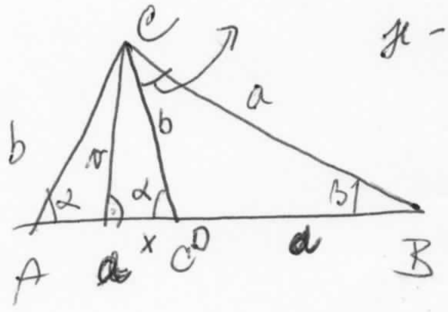
$\cancel{a^2 \leq 1(\sqrt{3}-1)\cdot\sin\alpha}$

zas tam dačo nesedí?

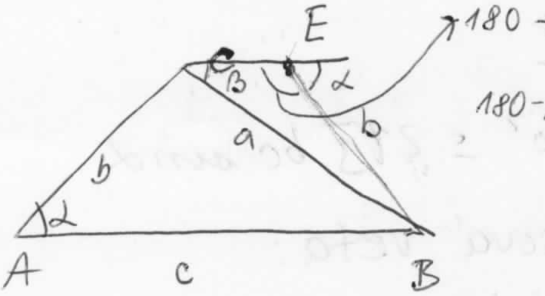


(5) Uvážte, ako k $\triangle ABC$, $a > b$, $\gamma < 90°$ vhodne prikresliť trojuholník s dvoma stranami $a, b$, ktoré by zvierali uhol $\alpha - \beta$.

Dve možnosti:




$$\gamma - (180 - 2\alpha) = 180 - \alpha - \beta - 180 + 2\alpha = \underline{\alpha - \beta}$$




$$180 - \beta - (180 - \alpha) = \underline{\underline{\alpha - \beta}}$$

(6) Označte $d$ dĺžku strany takého $\triangle$ a ukážte

$$(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) \le 2ab$$

$$\iff \quad (a^2-b^2)^2 \le (a^2+b^2)\, d^2$$

Riešenie: Podľa kosínovej vety platí

$$d^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta)$$

$$(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) \le 2ab \iff$$

$$(a^2+b^2)\,2ab\cos(\alpha-\beta) \le 4a^2b^2 \iff$$

$$(a^2+b^2)\left[a^2+b^2-d^2\right] \le 4a^2b^2$$

$$(a^2-b^2)^2 < (a^2+b^2)\,d^2 \qquad (*)$$

(7) Dokážte $(*)$. Pytagorova veta:

$$a^2 = v^2 + (d+x)^2 \qquad b^2 = x^2 + v^2 \qquad c^2 < a^2 + b^2 \iff \underline{\gamma < 90°}$$

$$a^2 - b^2 = d^2 + 2dx \qquad \text{dosadím}$$

$$(d^2 + 2dx)^2 < (a^2+b^2)\,d^2 \iff (d+2x)^2 < a^2+b^2$$

(8) Dokážte, že v každom $\triangle ABC$ platí

$$a^2+b^2+c^2 \le 4\sqrt{3}\, S(ABC)$$

$$\downarrow$$

obsah $\triangle ABC$

Dokážte, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď je trojuholník rovnostranný.

Riešenie:

$$a^2+b^2+c^2 \le 2\sqrt{3}\, bc \sin\alpha$$

Kosínusová veta:

$$2a^2+2bc\cos\alpha \le 2\sqrt{3}\, bc \sin\alpha$$

$$a^2+bc\cos\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2bc\sin\alpha$$

$$a^2 \le 2bc\,(\sin 60^\circ \sin\alpha - \cos\alpha\cos 60^\circ)$$

$$a^2 \le \cancel{d^2+b^2}$$

$$d^2-(b^2+c^2)$$

$$a^2+b^2+c^2 \le d^2$$