# MATEMATICKÉ BESEDY

14. 9. 2012

1. V množine reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2+\frac{1}{y^2}=2, \quad y^2+\frac{1}{z^2}=2, \quad z^2+\frac{1}{w^2}=2, \quad w^2+\frac{1}{x^2}=2$$

Riešenie: Spočítame:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+z^2+\frac{1}{z^2}+w^2+\frac{1}{w^2}=8$$

Z minula: $a+\frac{1}{a}\geq 2$ rovnosť nastáva pre $a=1$ )
pre $a\geq 0$

čiže $x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+z^2+\frac{1}{z^2}+w^2+\frac{1}{w^2}\geq 8$

rovnosť je pre $x^2=y^2=z^2=w^2=1$ (koľko riešení ? ) (16!)

2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x-y^2}=z-1, \quad \sqrt{y-z^2}=x-1, \quad \sqrt{z-x^2}=y-1$$

Riešenie: Zrejme $z\geq 1$, $x\geq 1$, $y\geq 1$. Rovnice umocníme

$$x-y^2=z^2-2z+1$$
$$y-z^2=x^2-2x+1$$
$$z-x^2=y^2-2y+1$$

a ?

Iná úvaha: $x\geq y^2$, $y\geq z^2$, $z\geq x^2$ $\Rightarrow$

$x\geq y^2\geq y \geq z^2\geq z\geq x^2 \Rightarrow 1\geq x \Rightarrow x=1$, podobne $y=1$, $z=1$.

3. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2$$

Riešenie:

Rovnice spočítame a dostaneme

$$x^2 + y^2 + z^2 - y - z - x = x^2 + y^2 + z^2$$

z toho $\underline{x + y + z = 0}$

(Spočítame prvé dve rovnice a dostaneme:

$y^2 - y = z^2 + z$ alebo )

Vyjadríme $z = -x - y$, dosadíme do prvej rovnice:

$$x^2 - y = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow y(2x + y + 1) = 0$$

1 $\Rightarrow y = 0 \quad z = -x \quad x^2 - x = 0, \; x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 1 \rightarrow$ 1 $\underline{(0,0,0)}$ 2 $\underline{(1,0,-1)}$

$\Rightarrow 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{y = -2x - 1}$

$z = -x - y = -x + 2x + 1 = x + 1$

Dosadíme do sústavy a máme

$$(x+1)^2 - x = (-2x-1)^2$$

$$x^2 + 2x + \cancel{1} - x = 4x^2 + 4x + \cancel{1}$$

$$3x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+1) = 0 \Rightarrow$$ 3 $\underline{(0,-1,1)}$ 4 $\underline{(-1,1,0)}$

Dostali sme 4 riešenia

4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc ②

$$\sqrt{x^2-y} = z-1 \qquad \sqrt{y^2-z} = x-1 \qquad \sqrt{z^2-x} = y-1$$

Riešenie: podmienky: $x^2 \geq y$ $\quad y^2 \geq z$ $\quad z^2 \geq x$

$z \geq 1 \quad x \geq 1 \quad y \geq 1$

Umocníme rovnice a dostaneme

$$x^2-y = z^2-2z+1$$
$$y^2-z = x^2-2x+1$$
$$z^2-x = y^2-2y+1$$

Rovnice spočítame

$$(y+z+x) = 3$$

$x \geq 1 \quad y \geq 1 \quad z \geq 1 \Rightarrow x=1, y=1, z=1$ je jediné riešenie

+ treba urobiť skúšku.

5. Po ceste prešlo dokopy 19 motoriek a áut. Keby prešlo o 4 autá menej, bolo by ich toľko ako dvojnásobok počtu motoriek, ktoré prešli. Koľko prešlo po ceste áut a koľko motoriek?

6. Určte počet trojciferných čísel, ktoré sú 19x väčšie ako ich

ciferný súčet

$$100a + 10b + c = 19a + 19b + 19c$$
$$81a = 9b + 18c$$
$$9a = b + 2c$$

hľadáme možnosti

$a=1$ $\quad b+2c=9$

$b=1 \quad c=4$

$b=3 \quad c=3$

$b=5 \quad c=2$

$b=7 \quad c=1$

$b=9 \quad c=0$

$a=2$ $\quad b+2c=18$

$b=0 \quad c=9$

$b=2 \quad c=8$

$b=4 \quad c=7$

$b=6 \quad c=6$

$b=8 \quad c=5$

$a=3$ $b+2c=27$

$b=9$ $c=9$

11 ?

7 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\quad y^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{z},\quad z^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Riešenie:

Spočítame: $x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Inač: $xyz\neq 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2yz&=y+z\\ y^2xz&=x+z\\ z^2xy&=x+y\end{aligned}\right\}(1)$$

Spočítam: $(xyz-2)(x+y+z)=0$

1 $xyz=2$

$$\begin{aligned} y+z&=2x\\ x+z&=2y\\ x+y&=2z\end{aligned}$$

$x=y$, $z=y$

$x=y=z=\sqrt[3]{2}$

+ skúška

2 $x+y+z=0$

$x^2yz=-x$

$xyz=-1$

2 rovnice, 3 neznáme

zvolím $z$:

$xy=-\frac{1}{z}$

$x+y=-z$ $x=-y-z$

$(-y-z)y=-\frac{1}{z}$

$-y^2-zy+\frac{1}{z}=0$

$y^2+yz-\frac{1}{z}=0$

$$y=\frac{-z\pm\sqrt{z^2+\frac{4}{z}}}{2}$$