Učební texty k přednášce ALGEBRAICKÉ STRUKTURY
Michal Marvan, Matematický ústav
Slezská univerzita v Opavě

3. Podalgebry

Definice. Buď $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$ algebra signatury (I, n), buď $B \subseteq A$ nějaká podmnožina. Řekneme, že množina B je *uzavřená* na operace α_i, $i \in I$, pokud pro všechna $i \in I$ platí:

1. Je-li $n_i = 0$, pak $\alpha_i \in B$.
2. Je-li $n_i > 0$, pak $\alpha_i(b_1, \dots, b_{n_i}) \in B$ kdykoliv $b_1, \dots, b_{n_i} \in B$.

Definice. Je-li B uzavřená podmnožina algebry $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$, zavedeme *zúžení* $\alpha_i|_B$ operací α_i na B předpisem:

1. Je-li $n_i = 0$, pak $\alpha_i|_B = \alpha_i$
2. Je-li $n_i > 0$, pak $\alpha_i|_B(b_1, \dots, b_{n_i}) = \alpha_i(b_1, \dots, b_{n_i})$ pro libovolná $b_1, \dots, b_{n_i} \in B$.

Evidentně jsou $\alpha_i|_B$ algebraické operace na množině B. Algebra $(B, (\alpha_i|_B)_{i\in I})$ se nazývá *podalgebra* algebry $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$. Termín podalgebra se někdy používá pro samotnou uzavřenou podmnožinu, protože její vybavení operacemi je jasné.

Příklady.

1. $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ jsou uzavřené podmnožiny v $(\mathbf{C}, +, 0, -)$. Jsou tedy $(\mathbf{Z}, +, 0, -) \subset (\mathbf{Q}, +, 0, -) \subset (\mathbf{R}, +, 0, -) \subset (\mathbf{C}, +, 0, -)$ podalgebry. Všechny jsou grupami, proto hovoříme o podgrupách. (Později uvidíme, že při zvolené signatuře je podalgebra grupy vždy zase grupou.)
2. Množina $m\mathbf{Z}$ všech celočíselných násobků čísla m, $m\mathbf{Z} := \{mk \mid k \in \mathbf{Z}\}$, je uzavřená podmnožina v grupě celých čísel $(\mathbf{Z}, +, 0, -)$. Důkaz: Cvičení.
3. $\mathbf{R}^* = (\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1, ^{-1})$ není podalgebra v $(\mathbf{R}, +, 0, -)$ už proto, že má rozdílné operace.
4. Prázdná množina $\emptyset$ je podalgebrou libovolné algebry bez nulárních operací a není podalgebrou žádné algebry s alespoň jednou nulární operací.
5. Každá algebra je podalgebrou sama v sobě.

Tvrzení. *Buďte B_j, $j \in J$ podalgebry v algebře $(A, (\alpha_i)_{i\in I})$. Průnik $\bigcap_{j\in J} B_j$ je opět podalgebra.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že průnik uzavřených podmnožin algebry A je opět uzavřená množina. Pro nulární operace: Víme, že $\alpha_i \in B_j$ pro všechna $j \in J$, a proto $\alpha_i \in \bigcap_{j\in J} B_j$.

Pro $n_i > 0$: Buďte $b_1, \dots, b_{n_i} \in \bigcap_{j\in J} B_j$ libovolná. Pak ale $b_1, \dots, b_{n_i} \in B_j$ pro všechna $j \in J$, a tedy i $\alpha_i(b_1, \dots, b_{n_i}) \in B_j$ pro všechna $j \in J$, načež $\alpha_i(b_1, \dots, b_{n_i}) \in \bigcap_{j\in J} B_j$.

Tvrzení. *Buď B_i, $i \in \mathbf{N}$, systém podalgeber v $(A, (\alpha_i))$ indexovaný přirozenými čísly a takový, že $B_i \subset B_j$ pro $i < j$. Pak je $\cup_{j\in J} B_j$ je podalgebra.*

Důkaz. (1) Uzavřenost na nulární operaci α_i: Víme, že $\alpha_i \in B_j$ pro všechna $j \in J$. Tím spíše $\alpha_i \in \bigcup B_j$.

(2) Uzavřenost na operaci α_i arity $n_i > 0$: Nechť $b_1, \dots, b_{n_i} \in \bigcup B_j$. To znamená, že existují indexy $j_1, \dots, j_{n_i} \in J$ takové, že $b_1 \in B_{j_1}, \dots, b_{n_i} \in B_{j_{n_i}}$. Buď $j_{\max} = \max\{j_1, \dots, j_{n_i}\}$, pak zřejmě všechny prvky $b_1, \dots, b_{n_i}$ náležejí $B_{j_{\max}}$. Načež $\alpha_i(b_1, \dots, b_{n_i}) \in B_{j_{\max}}$, a tím spíše $\alpha_i(b_1, \dots, b_{n_i}) \in \bigcup B_j$.

Buď A nějaká algebra, buď $X \subset A$ nějaká její podmnožina. Označme $\bar{X}$ průnik všech podalgeber $B \subseteq A$ takových, že $X \subseteq B$. Zřejmě $X \subseteq \bar{X}$, podle předchozí věty je navíc $\bar{X}$ podalgebra.

Alespoň jedna taková podalgebra B existuje — např. $B = A$. To je důležité, protože průnik prázdného systému množin obecně není definován.

Definice. Právě zkonstruovaná podalgebra $\bar{X}$ se nazývá *podalgebra generovaná množinou* X nebo též algebraický *uzávěr* množiny X.

Tvrzení. *Je-li B podalgebra a X podmnožina v algebře A, přičemž $X \subseteq B$, pak také $\bar{X} \subseteq B$.*

To je zřejmé, B je totiž jednou z podalgeber o jejichž průniku je řeč. V tomto smyslu je $\bar{X}$ nejmenší podalgebra obsahující množinu X.

Položíme-li $X = \emptyset$, dostaneme jako důsledek, že každá algebra obsahuje nejmenší podalgebru, a sice $\bar{\emptyset}$.

Tvrzení.
1. $X \subseteq Y \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$.
2. X je podalgebra právě tehdy, když $X = \bar{X}$.
3. $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$,

Důkaz. Cvičení.

Příklad. $(\mathbf{Z}, +, 0, -)$ je tzv. aditivní grupa celých čísel. Vyšetřeme její podalgebry generované některými množinami.

1. $\bar{\emptyset}$: Každá podalgebra v $\mathbf{Z}$ musí obsahovat nulární operaci, tedy 0. Na druhé straně lze snadno ověřit, že jednoprvková podmnožina $\{0\}$ je uzavřená. Závěr: $\{0\}$ je nejmenší podalgebra v $\mathbf{Z}$.
2. $\overline{\{1\}}$: Buď $K = \overline{\{1\}}$. Již víme, že $0 \in K$. Každá podalgebra v $\mathbf{Z}$ musí být dále uzavřená na sčítání. Obsahuje-li taková podalgebra prvek 1, musí obsahovat i prvky $2 = 1 + 1$, $3 = 1+2$, atd. Podalgebra K tedy obsahuje všechna přirozená čísla. Dále je uzavřená na unární operaci $-$, musí tedy obsahovat i prvky $-1, -2, -3$ atd., tedy i všechna záporná čísla. Tudíž, $K = \mathbf{Z}$.
3. $\overline{\{m\}}$, kde $m \in \mathbf{N}$: Jest $\overline{\{m\}} = m\mathbf{Z}$.
   Důkaz: Cvičení. Návod: Ukažte, že $m\mathbf{Z} \subseteq \overline{\{m\}}$. Tvrzení pak plyne z toho, že $m\mathbf{Z}$ je podalgebra.

Definice. Buď A algebra, buďte B_j, $j \in J$ její podalgebry. Označme

$$\bigvee_{j \in J} B_j = \overline{\bigcup_{j \in J} B_j}.$$

Podalgebra $\bigvee B_j$ se nazývá spojení podalgeber B_j.

Je-li množina J konečná, např. $J = \{1, \dots, k\}$, píšeme také $B_1 \vee \dots \vee B_k$.

Tvrzení. *Buďte B_j, $j \in J$ podalgebry v algebře A, buď C rovněž podalgebra v A. Pak $C = \bigvee_{j \in J} B_j$ tehdy a jen tehdy, když má následující dvě vlastnosti:*
1. Pro každé $j \in J$ je $B_j \subseteq C$.
2. Buď K nějaká podalgebra v A taková, že $B_j \subseteq K$ pro všechna $j \in J$. Pak $C \subseteq K$.

Důkaz. "$\Rightarrow$", ad 2: Z podmínek vyplývá, že $\bigcup B_j \subseteq K$, a proto i $\overline{\bigcup B_j} \subseteq K$.

"$\Leftarrow$": Cvičení. Nápověda: Z 1. vyjde $\overline{\bigcup B_j} \subseteq C$, z 2. vyjde $C \subseteq \overline{\bigcup B_j}$.

Vidíme, že $\bigvee_{j \in J} B_j$ je nejmenší podalgebra v A obsahující všechny podalgebry B_j.

Definice. Buď A algebra, $X \subset A$ podmnožina. Řekneme, že A je *generována* množinou X, jestliže $A = \bar{X}$. Říkáme též, že X je *množina generátorů* algebry A.

Je zřejmé, že algebra A je generována množinou X právě tehdy, když jediná podalgebra v A obsahující množinu X je samotná algebra A.

Cvičení.

1. $\bar{X} \vee \bar{Y} = \overline{X \cup Y}$.
2. $\bigvee_{j \in J} \bar{X}_j = \overline{\bigcup_{j \in J} X_j}$.
3. $\overline{X \cap Y} \subseteq \bar{X} \cap \bar{Y}$.
4. $\overline{\bigcap_{j \in J} X_j} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bar{X}_j$.
5. Uveďte příklad, kdy v 3. nenastane rovnost.

Definice. Minimální množina generátorů algebry A je taková množina generátorů A, že žádná její vlastní podmnožina není množinou generátorů algebry A.

Cvičení. $\{1\}$ a $\{-1\}$ jsou minimální množiny generátorů množiny $(\mathbf{Z}, +, 0, -)$.

Cvičení.

1. Buďte $u_1, \ldots, u_k$ vektory ve vektorovém prostoru $(V, +, 0, -, \mathbf{R})$. Pak

   $$\overline{\{u_1, \ldots, u_k\}} = \{a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k \mid a_1, \ldots a_k \in \mathbf{R}\}.$$

   Tradiční označení pro tento podprostor je $[\![u_1, \ldots, u_k]\!]$.
2. Buďte U_1, U_2 dva podprostory ve vektorovém prostoru $(V, +, 0, -, \mathbf{R})$. Pak

   $$U_1 \vee U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

   Tradiční a velmi výstižné označení pro tento podprostor je $U_1 + U_2$.
3. Buďte $u_1, \ldots, u_k$ vektory vektorového prostoru $(V, +, 0, -, \mathbf{R})$. Následující výroky jsou ekvivalentní:

   (a) $u_1, \ldots, u_k$ tvoří bázi ve V.

   (b) $\{u_1, \ldots, u_k\}$ je minimální množina generátorů.