Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA I, zimní semestr 2000/2001
Michal Marvan

5. Matice. Elementární úpravy

Matice typu r/s nad polem P vznikne, jestliže libovolných rs prvků pole P uspořádáme do obdélníkové tabulky o r řádcích a s sloupcích. Přesněji:

Definice. *Matice A typu r/s* nad polem P je libovolné zobrazení

$$A : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \to P.$$

Hodnota zobrazení A na dvojici $(i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\}$ se značí A_{ij}. Zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & & \cdots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}.$$

Matice typu r/s má celkem r řádků a s sloupců: i-tý *řádek* je s-tice $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{is})$, j-tý *sloupec* je r-tice $(A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{rj})$. Prvek A_{ij} leží na průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce. Proto se první index nazývá řádkový a druhý index se nazývá sloupcový.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{is} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rj} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}.$$

Běžně se používá terminologie vycházející z rozmístění prvků při zápisu matice: říkáme, že řádky s vyšším řádkovým indexem *následují za* (nebo též *leží pod*) řádky s nižším řádkovým indexem a říkáme, že sloupce s vyšším sloupcovým indexem následují za sloupci s nižším sloupcovým indexem, nebo též *leží vpravo od* nich. V analogickém smylu budeme používat slova *předcházející, vlevo* apod. a budeme je vztahovat i na prvky řádků a sloupců.

Nulovým řádkem matice budeme rozumět řádek sestávající ze samých nul, jiné řádky budeme nazývat *nenulové*.

Definice. Buďte A, A' matice typu r/s. Řekneme, že matice A' vznikla *elementární řádkovou úpravou* matice A, jestliže vznikla jedním z následujících způsobů:

1) k i-tému řádku byl přičten c-násobek j-tého řádku, to jest, řádek $(A_{i1}, \dots, A_{is})$ byl nahrazen řádkem $(A_{i1} + cA_{j1}, \dots, A_{is} + cA_{js})$, $c \neq 0$, ostatní řádky se nezměnily;
2) i-tý řádek byl vynásoben nenulovým prvkem $c \in P$, to jest, řádek $(A_{i1}, \dots, A_{is})$ byl nahrazen řádkem $(cA_{i1}, \dots, cA_{is})$, ostatní řádky se nezměnily;
3) i-tý a j-tý řádek byly vzájemně vyměněny, ostatní řádky se nezměnily.

Příklad. Po úpravě č. 1 budeme mít

$$A'_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & k \neq i \\ A_{il} + cA_{jl} & k = i, \end{cases}$$

po úpravě č. 2 bude

$$A'_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & k \neq i \\ cA_{il} & k = i, \end{cases}$$

po úpravě č. 3 bude

$$A'_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & k \neq i, j \\ A_{jl} & k = i \\ A_{il} & k = j. \end{cases}$$

Ke každé elementární úpravě matice A existuje elementární úprava inverzní, která matici A' navrátí do původního stavu A. Jsou to po řadě (ověřte):

1) k i-tému řádku se přičte $(-c)$-násobek k-tého řádku;
2) i-tý řádek se vynásobí nenulovým prvkem $c^{-1} \in P$;
3) i-tý a k-tý řádek se vzájemně vymění.

Příklad. Uvažujme o dvou reálných maticích

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že matice A' vznikla z matice A elementární úpravou – k druhému řádku byl přičten (-2)-násobek prvního řádku. Ověřte, že vykonáme-li na matici A' inverzní elementární úpravu (přičteme-li 2-násobek prvního řádku k druhému řádku), získáme zpět matici A.

Definice. Řekneme, že matice A, B jsou *řádkově ekvivalentní*, jestliže B vznikne z A konečnou posloupností elementárních řádkových úprav. Značíme $A \sim B$.

Příklad. Jako pokračování předchozího příkladu v matici A' ještě vyměňme řádky. Dostáváme posloupnost elementárních úprav

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

z čehož plyne, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problém k řešení. Ukažte, že každou úpravu typu 3 lze nahradit jistou posloupností úprav typu 1 a 2.

Lze se tedy obejít s prvními dvěma úpravami. Nicméně, třetí úprava se velmi často používá a například u determinantů má i zvláštní význam.

Řádková ekvivalence matic je relací ekvivalence na množině všech matic typu r/s nad polem P.

Tvrzení. *Buďte A, B, C matice. Pak platí*
(i) (reflexivita) $A \sim A$;
(ii) (symetrie) *jestliže* $A \sim B$, *pak* $B \sim A$;
(iii) (tranzitivita) *jestliže* $A \sim B$, $B \sim C$, *pak* $A \sim C$.

Důkaz. Cvičení.

Uveďme nyní motivující příklad. Soustava r lineárních rovnic o s neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_s$ nad polem P je soustava rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s &= b_2 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s &= b_r \end{aligned} \tag{$*$}$$

kde a_{ij}, b_i jsou prvky pole P; nazýváme je *koeficienty*. Řešením takové soustavy rozumíme s-tici $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ prvků pole P takových, že

$$a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + \cdots + a_{js}\xi_s = b_j$$

pro každé $j = 1, \ldots, r$. Základní úlohou je najít množinu všech řešení dané soustavy.

Z koeficientů a_{ij} a b_i sestavíme matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} & b_r \end{pmatrix},$$

která se nazývá *rozšířená matice soustavy*.

K dispozici máme účinnou metodu řešení, která se dnes nazývá Gaussova eliminační metoda. Pod jménem *fang čcheng* však byla v Číně známa několik století před naším letopočtem. V nynějším pojetí spočívá v provádění elementárních úprav rozšířené matice soustavy, které ji převedou na tvar, z nějž lze množinu všech řešení snadno zjistit. Podstatné je, že se při úpravách nemění množina řešení.

Tvrzení. *Elementární řádkové úpravy rozšířené matice A soustavy* $(*)$ *nemění množinu řešení této soustavy.*

Důkaz. Elementární řádkové úpravy odpovídají po řadě následujícím manipulacím s rovnicemi: k i-té rovnici se přičte c-násobek k-té rovnice; i-tá rovnice se vynásobí nenulovým prvkem $c \in P$; i-tá a k-tá rovnice se vzájemně vymění. Je dobře známo, že tyto manipulace nemění množinu řešení, a lze to snadno dokázat:

Rozeberme první elementární úpravu: Je-li s-tice $(\xi_1, \dots, \xi_s)$ řešením soustavy $(*)$, pak $a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{is}\xi_s = b_i$ pro každé $i = 1, \dots, r$, tedy i pro $i = k$. Víme, že i-tému řádku upravené matice A' odpovídá rovnice, která je součtem i-té a c-násobku k-té rovnice:

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2 + \dots + (a_{is} + ca_{ks})x_s = b_i + cb_k,$$

Ta má ovšem totéž řešení $(\xi_1, \dots, \xi_s)$, protože

$$\begin{aligned}&(a_{i1} + ca_{k1})\xi_1 + (a_{i2} + ca_{k2})\xi_2 + \dots + (a_{is} + ca_{ks})\xi_s \\ &\qquad = (a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{is}\xi_s) + c \cdot (a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \dots + a_{ks}\xi_s) \\ &\qquad = b_i + cb_k.\end{aligned}$$

Vidíme, že každé řešení $(\xi_1, \dots, \xi_s)$ zůstane řešením i po úpravě. Mezi množinou Ξ všech řešení původní soustavy a množinou Ξ' všech řešení upravené soustavy proto platí inkluze $\Xi \subseteq \Xi'$. Opačná inkluze platí též: stačí uvažovat o inverzní úpravě (přičtení $(-c)$ násobku k-tého řádku). Ohledně zbylých dvou úprav jde o snadné cvičení.

Důsledek. *Soustavy s ekvivalentními rozšířenými maticemi mají stejné množiny řešení.*

Nyní zavedeme jistý speciální tvar matice, Gauss–Jordanův. Jiný významný tvar, schodovitý, je o něco málo jednodušší. Rozebereme oba tvary najednou.

Definice. Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže

(i) každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
(ii) za nulovým řádkem následují jen nulové řádky.

Nejlevější nenulový prvek každého nenulového řádku nazvěme *hlavní prvek* tohoto řádku. Řekneme, že matice A je v *Gauss–Jordanově tvaru*, je-li ve schodovitém tvaru a navíc

(iii) hlavní prvek každého nenulového řádku je 1;
(iv) všechny prvky ve sloupci nad (a nejenom pod) každým hlavním prvkem jsou 0.

Formálněji se lze vyjádřit takto: Je-li i-tý řádek matice A nenulový, označme m_i nejmenší sloupcový index takový, že $A_{im_i} \neq 0$ (tj. A_{im_i} je hlavní prvek). Shora uvedené podmínky znějí:

(i) jsou-li i-tý a j-tý řádek nenulové a $i < j$, pak $m_i < m_j$;
(ii) nulové řádky následují za všemi nenulovými řádky;
(iii) $A_{im_i} = 1$;
(iv) $A_{jm_i} = 0$ pro všechna $j \neq i$.

Příklad. V následujících maticích jsou vyznačeny hlavní prvky:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Matice A je ve schodovitém tvaru. Indexy m_i pro tuto matici jsou $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4$ a je splněno $m_1 < m_2 < m_3$. Indexy m_4 a m_5 neexistují.

Matice B ve schodovitém tvaru není, ježto $m_2 = m_3$ a navíc za nulovým řádkem následuje nenulový.

Libovolná matice je řádkově ekvivalentní nějaké matici v Gauss–Jordanově (resp. schodovitém) tvaru. Zformulujeme dva algoritmy. Oba postupně obsazují hlavní prvky a anulují ty prvky matice A, které kazí Gauss–Jordanův (resp. schodovitý) tvar.

Zavedeme pojem *hlavní pozice* jako místo v matici, schopné pojmout hlavní prvek. Řádek (sloupec) obsahující hlavní pozici se bude nazývat hlavní řádek (sloupec). Indexy k, l budou vždy označovat hlavní pozici.

Algoritmus 1 (transformace na schodovitý tvar). Vstupem je matice A.

1. Počáteční hlavní pozice budiž $(1, 1)$ (tj. $k := 1$, $l := 1$).
2. Je-li na hlavní pozici nenulový prvek, bude hlavním prvkem a pokračujeme krokem 5.
3. Je-li v hlavním sloupci pod hlavní pozicí alespoň jeden nenulový prvek, vybereme jeden z nich a zaměníme jeho řádek s hlavním řádkem. Vybraný prvek se tak stane hlavním prvkem. Pokračujeme krokem 5.
4. Jsou-li všechny prvky ležící v hlavním sloupci na hlavní pozici a pod ní nulové, pak nynější hlavní pozice nedovoluje obsadit hlavní prvek. Posuneme hlavní pozici o jedno místo vpravo ($l := l + 1$) a vracíme se ke kroku 2.
5. V tomto okamžiku je již nalezen nenulový hlavní prvek A_{kl}. Hlavní řádek vydělíme hlavním prvkem. Poté je hlavní prvek roven jedné: $A_{kl} = 1$.
6. Pro všechna $i > k$, k i-tému řádku matice A přičteme $(-A_{il})$-násobek hlavního řádku. Poté již $A_{il} = 0$ pro všechna $i > k$ (anulují se všechny prvky pod hlavní pozicí).
7. Skončil vnější cyklus algoritmu; během něho byl nalezen jeden hlavní prvek. Zvolíme novou hlavní pozici o jeden krok vpravo dole od stávající hlavní pozice ($k := k + 1$, $l := l + 1$). Vracíme se ke kroku 2, hledáme další hlavní prvek.

Algoritmus končí, padne-li hlavní pozice mimo matici. Výstupem je (upravená) matice A.

Tvrzení. *Algoritmus 1 převádí libovolnou matici A na řádkové ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.*

Důkaz. Cvičení. Je nutno ověřit, že všechny manipulace s řádky byly elementárními úpravami. Přitom se vlevo od hlavních prvků se po celý průběh algoritmu vyskytují pouze nulové prvky.

Příklad. Následující úpravy představují převedení na schodovitý tvar. Tučně vyznačujeme aktuální hlavní pozici (nemusí jít o hlavní prvek, je-li $\mathbf{0}$). Nad symboly $\sim$ stojí číslo kroku algoritmu. Matice, které jsou si rovny, se liší vyznačením nové hlavní pozice.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{5}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \overset{4}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Další volba hlavní pozice směřuje mimo matici, algoritmus končí.

Algoritmem 1 dosahujeme navíc i toho, že platí podmínka (iii) z definice Gauss–Jordanova tvaru. Ke splnění podmínky (iv) stačí nepatrně změnit krok 6.

Algoritmus 2 (transformace na Gauss–Jordanův tvar). Probíhá stejně jako Algoritmus 1, ale šestý krok je nahrazen následujícím:

6′. Pro všechna $i \neq k$, k i-tému řádku matice A přičteme $(-A_{il})$-násobek hlavního řádku. Poté již $A_{il} = 0$ pro všechna $i \neq k$ (anulují se všechny prvky nad a pod hlavní pozicí).

Tvrzení. *Algoritmus 2 převádí libovolnou matici A na Gauss–Jordanův tvar.*

Příklad. Následující úpravy představují převedení na Gauss–Jordanův tvar.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Hlavní prvky pro jednoduchost neuvádíme.)

Poznamenejme ještě, že při numerickém výpočtu je třeba uvažovat i o zaokrouhlovacích chybách. Mohlo by se stát, že hlavní prvek vybraný ve třetím kroku by byl blízký nule a zaokrouhlením podílu v kroku 5 by se mohl výpočet zcela znehodnotit. Potom je nutno krok 3 modifikovat tak, že vybereme ten z nenulovývh prvků pod hlavní pozicí, který má největší absolutní hodnotu (nazývá se *pivot*).

Ve vztahu k řešení soustav lineárních rovnic je Gauss–Jordanův tvar výjimečný tím, že z něj lze řešení snadno určit bez dalšího počítání. Víme, že každý sloupec kromě posledního odpovídá jedné neznámé. Obsahuje-li některý sloupec hlavní prvek, nazveme odpovídající neznámou *hlavní*, ostatní neznáme nazveme *parametrické*.

Vyskytuje-li se některý hlavní prvek v posledním sloupci, znamená to, že soustava zahrnuje nesplnitelnou rovnici $0 = 1$, a tedy nemá řešení.

V opačném případě je postup k nalezení všech řešení následující: (1) vyznačíme hlavní prvky; (2) existují-li parametrické neznámé, převedeme je na pravou stranu rovnic (se změnou znaménka); tím získáme vyjádření hlavních neznámých v závislosti na parametrických neznámých.

Parametrické neznámé vystupují jako parametry řešení – pro každou hodnotu takových parametrů dostaneme právě jedno zvláštní řešení soustavy. A naopak, každé jednotlivé řešení soustavy získáme vhodnou volbou parametrů.

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Obě matice A, B jsou v Gauss–Jordanově tvaru, hlavní prvky jsou vyznačeny. Matice A je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 6x_3 \quad &= 3, \\ x_2 + 3x_3 \quad &= 0, \\ x_4 &= 3, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Existují tři hlavní neznámé x_1, x_2, x_4 a jedna parametrická neznámá x_3. Převedením členů s x_3 na druhou stranu získáme vyjádření x_1, x_2, x_4 pomocí x_3:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 3 - 6x_3, \\ x_2 \quad &= -3x_3 \\ x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Množina všech řešení naší soustavy proto je

$$\Xi_A = \{\, (3 - 6x_3, -3x_3, x_3, 3) \mid x_3 \in P \,\}.$$

Matice B je zase rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 6x_3 \quad &= 0, \\ x_2 + 3x_3 \quad &= 0, \\ x_4 &= 0, \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

V tomto případě neexistuje žádné řešení ($\Xi_B = \emptyset$), protože se vyskytuje hlavní prvek v posledním sloupci. A skutečně, páté rovnici $0 = 1$ nelze vyhovět.