MATEMATICKÉ BESEDY

14.10.2011

DELITEĽNOSŤ II.

1. Učiteľ si myslí číslo. Žiakom prezradil, že jeho číslo končí číslicou 6 a dáva pri delení 13 zvyšok 9. Určite aký zvyšok dáva učiteľovo číslo pri delení číslom 65

Riešenie: $65 = 5 \cdot 13$

n - učiteľovo číslo

$$n \equiv 1 \pmod 5$$
$$n \equiv 9 \pmod{13}$$

Možné zvyšky sú $\{9, 9+13, 9+26, 9+39, 9+52\}$

Jediné $9+52=61$ dáva správny zvyšok pri delení 5.

2. $(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$

$a = kn + r_1$ $\quad a \bmod n = r_1$

$b = ln + r_2$ $\quad b \bmod n = r_2$

$$a+b = (k+l)n + r_1 + r_2$$

$$(a+b) \bmod n = (r_1+r_2) \bmod n = (r_1+r_2) \bmod n$$

3. Dokážte, že číslo s desiatkovým zápisom $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ dáva pri delení 11 rovnaký zvyšok ako číslo $a_0 - a_1 + a_2 \cdots + (-1)^k a_k$

4. Dokážte, že ak pre $a, b, n \in N$ platí

$a \bmod n = b \bmod n$

tak $\forall c \in N \quad (c \cdot a) \bmod n = c \cdot b \bmod (c \cdot n)$

$$\left.\begin{array}{l} a = kn + r \\ b = ln + r \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} ca = ckn + cr \\ cb = cln + cr \end{array}$$

$(c \cdot a) \bmod n = cr$

$(cb) \bmod cn = cr$

lebo $\underline{cr < cn}$ lebo $r < n$

Platí aj opačná implikácia?

t.j. platí? $(c \cdot a) \bmod n = c \cdot b \pmod{c \cdot n}$

$$\Downarrow$$

$a \bmod n = b \bmod n$?

Neplatí. Ľahko sa vymyslí protipríklad:

Napríklad: $c = 3 \quad n = 3$

$a = 5 \quad b = 3$

$3 \cdot 5 \pmod 3 = 9 \pmod 9 = 0$

$5 \bmod 3 \neq 3 \bmod 3$

$ca = kn + r$

$cb = lcn + r$

$r = ca - kn = cb - lcn$

$c(a - b) = n(k - lcn)$

$\underline{c = 10} \quad \underline{n = 5}$

$\dfrac{a = 6}{b = 5}$ nevyhovuje napr.

$ca = cx_1 n + cz_1 \qquad cz_1 = cz_2$

$cb = cx_2 n + z_2 c$

$cz_1 < cn \qquad cz_2 < cn$

$cz_1 \pmod n = cz_2 \pmod{nc}$

5. Dokážte, že ak čísla a, b dávajú pri delení d postupne zvyšky u, v, potom sú zvyšky pri delení ab, uv číslom d rovnaké.

Riešenie:

$$a = kd + u$$
$$b = ld + v$$
$$ab = (kd+u)(ld+v) = \underbrace{d(d+kv+ul)}_{\text{toto je del. } d} + uv$$

uv

6. Dokážte, že zvyšky čísel $1, 10, 10^2, 10^3, \dots$ pri delení ľubovoľným nepárnym prvočíslom rôznym od 5 tvoria periodickú postupnosť.

Riešenie: $10^{k-1} < p \leq 10^k$ pre nejaké k

Nech ten zvyšok je... m

Potom zvyšky pri delení vyšších mocnín 10 sú tie isté ako zvyšky pri delení

$m, m^2, m^3, \dots$ pri delení p

tých zvyškov môže byť len $p-1$ a ak sa raz zopakuje, už sa opakuje znova...

6. Zistite zvyšok pri delení čísla $10!$ 77.

$$10! = \underbrace{\underbrace{10 \cdot 9}_{2} \cdot \underbrace{8 \cdot 7}_{1} \cdot \underbrace{6 \cdot 5}_{8} \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{3}}$$

$\underbrace{8 \quad 3}_{3}$

podľa úlohy 4

$\frac{10!}{\cancel{77}\,7} = 6 \pmod{11}$

pri delení 11 zvyšok 6 podľa úlohy 5.

Inač: $\frac{10!}{7} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$,

6 8 3

60 3

5

15 → 4

$\frac{10!}{7} = 4 \mod 11$

úloha 4

$10! = 28 \pmod{11} = \underline{\underline{6 \mod 11}}$

~~7. Zistiť súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré vznikn\u00fa z cifier 0, 1, .., 9, pričom každá je použitá práve raz.~~

~~Riešenie:~~

~~každá cifra 1x 0, ..., 9 súčet 45~~

~~$45\cdot 10^9 + 45\cdot 10^8 + 45\cdot 10^7 + \dots + 45\cdot 10 + 45$~~

~~A = 5 6 1 1 1 1 1 1 1 0 5~~

~~8. Zistite súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré vzniknú z cifier 1, ..., 9, pričom každá z nich je použitá práve raz.~~

~~Riešenie: Odpočítam tie, kde bola cifra 0:~~

~~čiže $55\cdot 10^8 \cdot 55\cdot 10^7 + \dots + 55 =$~~

~~B = 56 1 1 1 1 1 1 1 0 5~~

~~Výsledok A − B~~

~~$ca = cx_1 n +$~~

ešte raz nech je to vidieť

$ca = cln + \underbrace{r_1 c}$ a já viem, že

$cb = cln + \underbrace{r_2 c}$

$r_1 c \pmod n = r_2 c \pmod{cn}$

$\Downarrow$?

$r_1 = r_2$?

čo keď c je veľké?

$c = 10$ $\quad 10 r_1 \pmod 5 = 10 r_2 \pmod{50}$

0

r_1 akékoľvek

$\underline{r_1 = 1}$ $\quad \underline{r_2 = 6}$

moment ne

$\underline{c = 10}$ $\quad \underline{n = 5}$ a $cn = 50$

asi určite ne ale hej či

$r_1 = 1$

$a = 6$ $\quad \underline{r_2 = 5}$ 0

$b = 5$

$60 \pmod 5 = 50 \pmod{50}$

ale

Riešenie:

$\downarrow$

každá cifra

$0, \dots, 9$

súčet 45

koľkokrát sa vyskytne?

$$\frac{10!}{10} = 9!$$

súčet je teda $9! \cdot 45 = c$

Dokopy $r = c \cdot 1 + c \cdot 10 + c \cdot 10^2 + \dots + c \cdot 10^9 =$

$$c \cdot 1111111111 = 9!\,5 \cdot 9 \cdot \frac{9999999999}{9} = 9!\,45 \cdot \frac{10^{10}-1}{9} =$$

$$= 9!\,5 \cdot (10^{10}-1)$$

8. Zistite súčet všetkých prirodzených čísel, ktoré vzniknú z cifier $1, \dots, 9$, pričom každá z nich je použitá práve raz.

Riešenie! $d = 8! \cdot 45$

$$w = d \cdot 111111111 = d \cdot \frac{10^9-1}{9} = 8!\,5(10^9-1)$$

$h = r - w$