

Posudok na dizertačnú prácu

Leszek Szala:

Recurrence in systems with randomly perturbed trajectories

1. Úvod

Dizertačná práca sa zaoberá rekurenciou v autonómnych i neautonómnych dynamických systémoch s náhodnými perturbáciami. Nadväzuje najmä na články Jankovej a Smítala z deväťdesiatych rokov.

2. O štruktúre a obsahu dizertačnej práce

Dizertačná práca je súborom troch autorových článkov opatrených spoločným komentárom. Ide o články:

- [1] L. Szala, *Recurrence in systems with random perturbations*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 23 (2013), no. 6, 1350110, 5 pp.

Autor tu zavádza pojem (f, δ) -rekurentného bodu pre tzv. (f, δ) -procesy na intervale, čiže pre intervalový dynamický systém zadaný spojitým zobrazením f , v ktorom sú však malé náhodné perturbácie. Prit'ahujúci pevný bod zobrazenia f je vždy (f, δ) -rekurentný s nejakým δ . Autor tiež študuje, za akých predpokladov možno to isté tvrdiť o bodoch nekonečnej ω -limitnej množiny zobrazenia typu 2^∞ .

- [2] L. Szala, *Recurrence in systems with randomly perturbed trajectories on the n -dimensional cube*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 24 (2014), no. 11, 1450137, 5 pp.

Práca rozširuje výsledky [1] z intervalu na n -rozmernú kocku a začína sa tu študovať aj rekurencia v neautonómnych systémoch s náhodnými perturbáciami. Podivuhodným výsledkom v tomto článku je Dôsledok 3.1 hovoriaci, že pre autonómne systémy na n -rozmernej kocke je každý (f, δ) -rekurentný bod aj rovnomerne (syndeticky) (f, δ) -rekurentným.

- [3] L. Szala, *Chaotic behaviour of uniformly convergent nonautonomous systems with randomly perturbed trajectories*. Submitted, 13 pp.

Pre neautonómne systémy na intervale resp. n -rozmernej kocke zadané rovnomerne konvergentnou postupnosťou zobrazení f_0, f_1, \dots , v ktorých sa pripúšťajú malé náhodné perturbácie, sa najskôr študujú podobné otázky ako v [1]. Ďalej sa rieši problém, či rekurentný (v klasickom zmysle) bod limitnej funkcie f je rekurentným aj pre opísaný perturbovaný neautonómny systém. Ukazuje sa tu tiež, že (v prípade intervalu) sa nechaotičnosť limitnej funkcie f (v zmysle aproximácie trajektórií periodickými trajektóriami) v istom zmysle prenáša na ten perturbovaný neautonómny systém (náhodne perturbované trajektórie neautonómneho systému sa aproximujú periodickými trajektóriami limitnej funkcie).

3. Hodnotenie kvality dizertačnej práce

Najskôr uvediem niektoré konkrétne pripomienky, ktoré mám k dizertácii:

Aj keď ide o subjektívny názor a iní nemusia súhlasiť, ja by som privítal, keby bol úvodný komentár podrobnejší a viac vysvetľujúci, teda aj užitočnejší pre potenciálnych čitateľov. Autor tak mohol zároveň prezentovať svoju schopnosť vysvetľovať veci spôsobom priateľským k čitateľovi, čo je niečo čo z rôznych dôvodov zriedkavo vidieť v článkoch. Dizertačná práca však na to ponúka priestor a v niektorých krajinách sa to

chápe ako vyslovene žiadúce. Podľa môjho názoru sa ponúkali aspoň tri možnosti ako sa pokúsiť dosiahnuť to.

Po prvé, viacero definícií si zaslúžilo komentáre. Napr. čitateľ by celkom prirodzene očakával, že maximálna ω -limitná množina bude definovaná ako ω -limitná množina, ktorá je maximálna v zmysle inklúzie. Definícia na strane 8 je iná, autor to mohol okomentovať. Pri definícii rovnomernej rekurentnosti mohol autor čitateľa upozorniť na veľkú nejednotnosť terminológie ohľadom tohto pojmu. Definícia (f, δ) -rekurentného bodu (resp. $(f_{0, \infty}, \delta)$ -rekurentného bodu v úvodnom komentári na str. 8) obsahuje požiadavku na každé δ' menšie než δ . Tu by bol namieste komentár, prečo sa namiesto toho nepožaduje splnenie príslušnej požiadavky pre δ , čo by dávalo jednoduchšiu definíciu. Konečne, na str. 9, kde sa definuje kedy je neautonómny systém daný postupnosťou zobrazení f_0, f_1, \dots nechaotický vzhľadom na malé perturbácie, sa objavuje požiadavka, aby niečo platilo pre zobrazenia od k -teho počnúc. Fakt, že ak chceme v teórii neautonómnych systémov dostať užitočné výsledky, tak je rozumné pripustiť možnosť ignorovania začiatočného úseku danej postupnosti zobrazení, je už staršieho dáta. Otázkou je, či je toto "dobře známe" alebo je to dobre známe len tým, čo už študovali neautonómne systémy. Autor sa tu mohol rozhovoriť o tom, prečo je v definícii vhodné ignorovať začiatočný úsek postupnosti.

Po druhé, autor v úvodnom komentári mohol uviesť niektoré príklady uvádzajúce čitateľa do problematiky náhodných perturbácií v dynamických systémoch, či do používaných techník.

Po tretie, v úvodnom komentári mi chýba pojednanie o tom, akým smerom by sa ďalší výskum mohol uberať. Aké sú zaujímavé otázky, má autor prípadné hypotézy? Ako jednu drobnosť podotknem, že napr. Veta 4 na str. 10, čo je už vyššie spomínaný Dôsledok 3.1 z článku [2] je natoľko pekná a prekvapujúca, že je priam hriechom sa pri nej nezastaviť, nespomenúť súvis rovnomernej rekurencie s minimálnosťou pre neperturované systémy a nepošpekulovať o súvisi s možnými definíciami minimálnosti pre perturbované systémy.

Samotné tri články sú písané obvyklým časopiseckým štýlom, dobrou angličtinou. Sú dobrým príspevkom k slabo rozvinutej teórii systémov aké autor skúma. Niektoré pripomienky mám aj k nim. Uvediem dva príklady. V článku [1], formulácia Vety 1 sa mi nezdá dobrá. Autor najskôr fixuje *jeden* (f, δ) -proces a potom hovorí, kedy je bod (f, δ) -rekurentný. Nemá to byť tak, že sa bude tvrdiť, že bod je (f, δ) -rekurentný ak čosi platí pre *každý* (f, δ) -proces? V článku [2], vo Vete 3 má n dva rôzne významy (dimenzia kocky a perióda periodického bodu).

Autorove výsledky by mohli podnietiť ďalší výskum v príslušnej oblasti. Dizertačná práca je kombináciou viet a kontrapríkladov, čo je typické pre teóriu dynamických systémov. Autor preukázal schopnosť používať metódy topologickej dynamiky a teórie pravdepodobnosti na samostatnú vedeckú prácu. Celkove ide o dizertačnú prácu štandardnej úrovne, jej výsledky sa už uplatnili v časopisoch.

4. Záver

Odporúčam, aby bol Mgr. Szalovi po úspešnej obhajobe udelený titul "PhD".



Opava, 20. 11. 2014

Prof. RNDr. Lubomír Snoha, DSc., DrSc.