

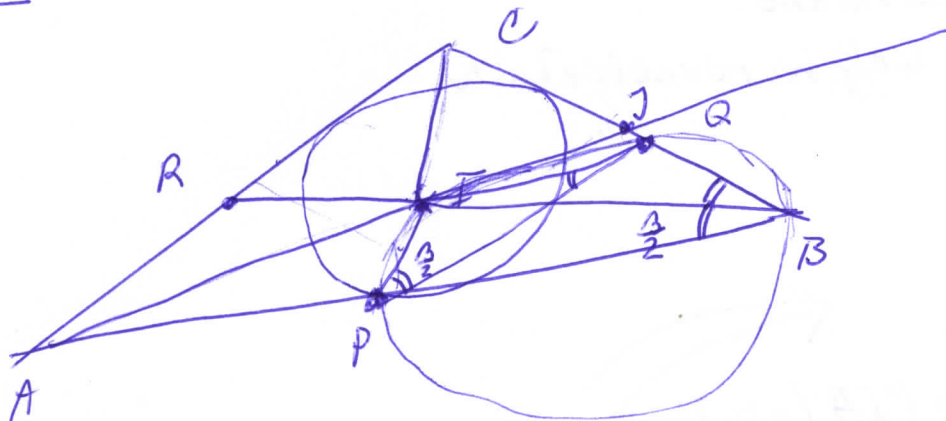
MATEMATICKÉ BESEDY

30. 11. 2012

Označme O stred kružnice vpísanej $\triangle ABC$. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I , pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q . Priesečník priamky QI so stranou AC označme R .
Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$$

PRIKLAD 1: Označme J priesečník priamky AI so stranou BC .



Dokažte, že platí:

$$a) \quad |\sphericalangle JIQ| = |\sphericalangle RIA| = |\sphericalangle PIA| = |\sphericalangle IPQ| = |\sphericalangle PBI| = |\sphericalangle QBI| = \frac{1}{2}B$$

$$|\sphericalangle QBI| = \frac{1}{2}B = |\sphericalangle PBI| = |\sphericalangle IPQ|$$

↓
vrcholové uhly
nad tetivou IB

$|PI| = |IQ|$ (vrcholové uhly sú rovnako veľké)
nad týmito tetivami

$$|\sphericalangle JIQ| = \frac{B}{2} \quad (\text{úsekový uhol} = \text{obvodového uholu})$$

$$\frac{\beta}{2} \quad | \angle Q | = | \angle RIA | \quad \frac{\beta}{2} \quad | \angle PIA | = | \angle PBI | = \frac{\beta}{2}$$

$\downarrow$ vrcholové uhly $\downarrow$ obovodový uhol
 = úsekovému uhlu

b) $PQ \parallel AI$

(z rovnosti uhlov $| \angle QPI | = | \angle PIA |$
 s triedavými uhly na rovnobežkách)

c) $| \angle QIB | = | \angle QPB | = | \angle IAP | = | \angle RAI | = \frac{\alpha}{2}$

$\swarrow$ $\swarrow$ $\overbrace{\hspace{10em}}$
 rovnosť súhlasné z definície
 obovodových uhly na rovnobežkách
 uhlov

d) $|CR| = |CQ|$

$\triangle RIA \sim \triangle PIA$ (ush)

$\Rightarrow |RI| = |PI| = |IQ|$

$\Rightarrow \triangle CRQ$ je rovnostranný

e) $| \angle BQR | = | \angle ARQ | = 90 + \frac{\alpha}{2}$

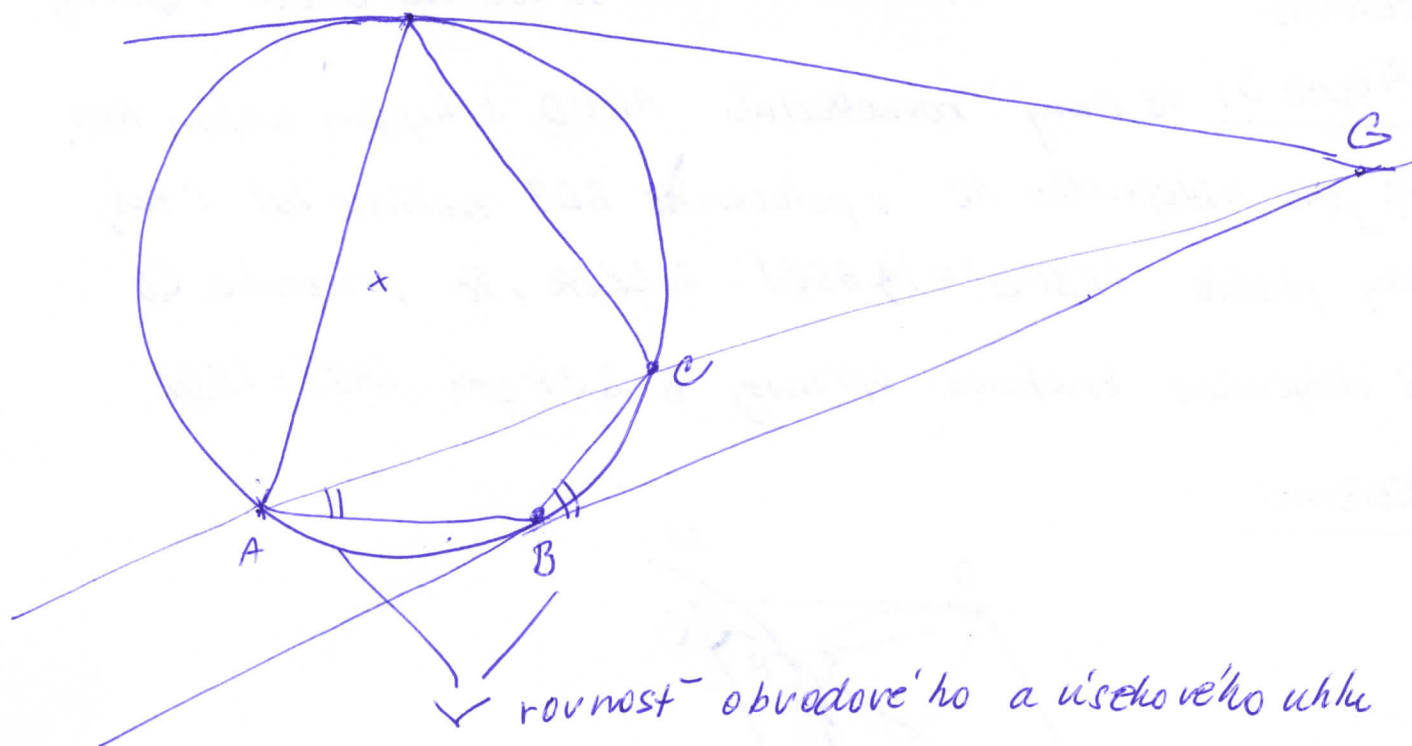
$\parallel$
 $180 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180 - (90 - \frac{\alpha}{2}) = 90 + \frac{\alpha}{2}$

Toto podobne

PRÍKLAD 2:

(2)

Do kružnice je vpísaný štvoruholník $ABCD$, jeho uhlopriečka BD má je priemerom. Dokažte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice dotýkajú v bodoch B a D , ležia na priamke AC
 $\Rightarrow |AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$



Riešenie: (Ako by to bolo keby BD bola priemerom kružnice?
 Dotyčnice by sa nepretli.)

$|\triangle BAG| \sim |\triangle CBG|$ (2 zhodné uhly, rovnosť o bvodového a
 stredového uhlu)

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|GB|}{|GC|} \quad \left(= ? \frac{|AD|}{|CD|} \right)$$

analogicky pre $|\triangle ADG|$ a $|\triangle DCG|$

+ $|GB| = |GD|$ (úseky dotyčnice z bodu G ku kružnici)

Opačné tvrdenie $\rightarrow$ ako na to?

Nech polpriamka AC pretne kružnicu k ešte v bode A' ,
ukážeme, že $A' = A$.

$$\Rightarrow \triangle BA'D \cong \triangle BAD \text{ (sus)}$$

$$|BD| = |BD| = \text{zhodná} \Rightarrow A = A'$$

+ rozobrať prípad, či aspoň komentovať čo ak bod G leží v opačnej polorovine.

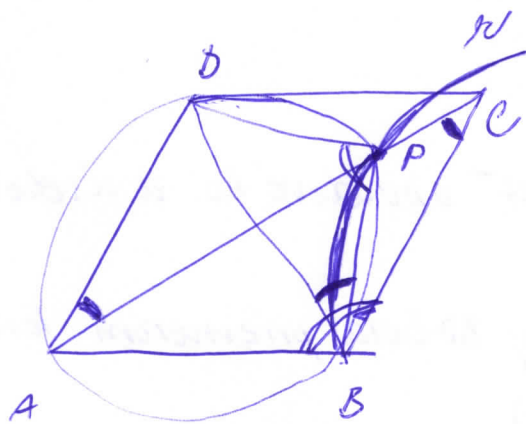
PRÍKLAD 3: Je daný rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC .

Na jeho uhlopriečke AC v polorovine BDC zvolíme bod P tak,

aký platilo $\angle BPD = \angle ABC$. Dokážte, že priamka CD

je dotyčnicou kružnice opísanej $\triangle BCP \Leftrightarrow |AB| = |BD|$

Riešenie:



$$\text{V rovnobežníku } \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ štvoruholník $ABPD$ je tetivový $\Rightarrow$

kružnica opísaná $\triangle BPD$ prechádza bodom A .

$\hookrightarrow$ BD je dotyčnica ku kružnici opísanej $\triangle BCP$

(rovnosť o budového a úsekového uhla)

$$\Rightarrow \text{Ak } CD \text{ je dotyčnica ku } k \Rightarrow |BD| = |CD| = |AB|$$

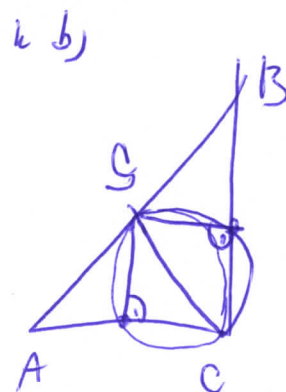
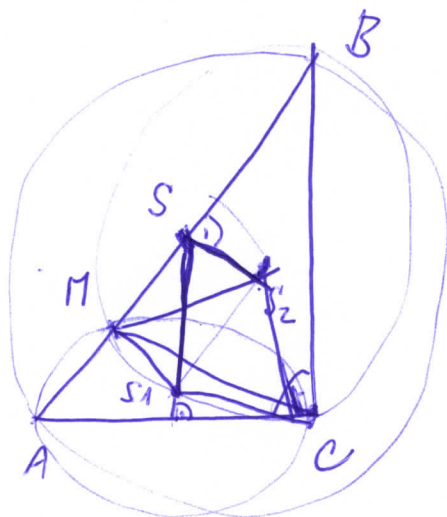
$\Leftarrow$ Ak $|AB| = |BD| \Rightarrow |CD| = |BD|$ leží bod D na ose
keďže BC taká je dotyčnicou je mieren BD , ale i priamka
osovo odsekná $H_j(CD)$

Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepomky AB pravouhleho $\triangle ABC$.
Označme S, S_1, S_2 stredy kružníc opísaných $\triangle ABC, \triangle MC, \triangle MC$

a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2, S ležia na jednej kružnici.

b) Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer?

Riešenie:



a) $|\angle MS_1C| + |\angle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

(zo vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom
pre $\triangle MCB$ a $\triangle MAC$ nad tetivou MC spoločnou obom $\triangle$)

$\Rightarrow$ štvoruhelník MS_1CS_2 je tetivový.

$$|\angle S_1MS_2| = |\angle S_1CS_2| = 90^\circ$$

$\leftrightarrow S_1S_2$ je os MC $\nearrow$

kružnica opísaná MS_1CS_2 je preto Thaletova kružnica nad S_1S_2

Platí $|\angle S_1SS_2| = 90^\circ$, pretože S_1, S_2 ležia na osi AC

a S_1, S_2 ležia na osi BC

($S_1S_2 \parallel AC$)

b) Vezme $2r \geq |CS|$ @ rovnost $(\Rightarrow |CS|$ je priemer kružnice.

Kružnice s priemerom CS prechádza stredmi

odvesien AC, BC $2r = |CS|$ nastane $(\Rightarrow$

S_1 je stred AC

S_2 stred BC $(\Rightarrow \Pi$ je päta výšky z C na AB

