Slezská univerzita v Opavě
Matematický ústav v Opavě

Petr Chládek

Funkcionální formulace obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

Autoreferát disertace k získání akademického titulu Ph. D.

Červen 2005

Geometrie a globální analýza

Výsledky obsažené v disertační práci byly získány v průběhu doktorského studia oboru Geometrie a globální analýza na Matematickém ústavu Slezské univerzity v Opavě v letech 2002-2005.

Uchazeč: Mgr. Petr Chládek
Matematický ústav v Opavě

Školitel: Doc. RNDr. Lubomír Klapka, CSc.
Matematický ústav v Opavě

Oponenti: Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
Univerzita Palackého, Olomouc

Doc. RNDr. Milan Tvrdý, CSc.
Matematický ústav AV ČR, Praha

Autoreferát byl rozeslán dne 28. července 2005.

Státní doktorská zkouška a obhajoba disertační práce se konají dne 18. srpna 2005 od 11 hodin v Matematickém ústavu v Opavě, Na Rybníčku 1, Opava.

S disertací je možno se seznámit v knihovně Matematického ústavu Slezské univerzity, Na Rybníčku 1, Opava.

Prof. RNDr. Jaroslav Smítal, DrSc.

předseda komise pro obhajobu

1. Současný stav problematiky

Různými aspekty vzájemného vztahu funkcionálních rovnic a obyčejných diferenciálních rovnic se zabývalo ve svých pracích mnoho autorů (viz např. M.A. Abdelkader [1], E. Castillo a R. Ruiz-Cobo [7], L.N. Eshukov [11], F. Neuman [23]). Předložená disertace věnuje zvláštní pozornost funkcionálni podmínce, za níž jsou prvky předepsané množiny funkcí řešeními nějaké obyčejné diferenciální rovnice.

Tato podmínka je v prvním řádu rovnic dobře známa (např. [18, problem 17-15]): parciální zobrazení $\tau \mapsto F(\tau, \sigma, a)$ jsou řešeními nějaké diferenciální rovnice typu $\dot{x} = f(\tau, x)$ s hladkou pravou stranou splňujícími Cauchyovy podmínky $x(\sigma) = a$ právě když je F hladké řešení funkcionálních rovnic

$$F(\tau, \rho, F(\rho, \sigma, a)) = F(\tau, \sigma, a), \quad F(\sigma, \sigma, a) = a.$$

To platí bez formální změny i pro systém obyčejných diferenciálních rovnic, pokud je počet rovnic stejný jako počet neznámých. Uvedená funkcionální rovnice neobsahuje derivace a má tedy smysl i v nehladkém nebo dokonce nediferencovatelném případě, je tedy dosti podstatným zobecněním obyčejných diferenciálních rovnic. Její autonomní případ je totožný s rovnicí pro tok vektorového pole $G(\alpha, G(\beta, a)) = G(\alpha + \beta, a)$, $G(0, a) = a$, kde $F(\tau, \sigma, a) = G(\tau - \sigma, a)$, (viz např. [24, podrobnosti jsou v kapitole 1.3]) a nachází uplatnění i v teorii dynamických systémů s diskretním časem (např. [4, vztah (3), str. 1637]).

Jak ale vypadá hledaná podmínka ve vyšším, to je nejméně ve druhém, řádu obyčejných diferenciálních rovnic? Každý systém rovnic druhého řádu je sice možné převést na systém rovnic prvního řádu přeměnou prvních derivací v nové neznámé. Tímto běžným obratem ale dospějeme jen k funkcionálním rovnicím, které opět obsahují derivace. Přesto se však vyloučení všech derivací ve dvou speciálních případech podařilo uskutečnit: v lineárním případě [23] a v případě rovnic pro geodetiky [15].

2. Cíl disertační práce

Cílem práce je najít analogickou funkcionální formulaci neobsahující derivace i pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\ddot{x} = f(\tau, x, \dot{x}) \tag{1}$$

s hladkou pravou stranou.

3. Zvolená metoda zpracování

Práce je založena na myšlence charakterizace variety všech úplných řešení obyčejné diferenciální rovnice pomocí atlasu. Pro rovnice prvního řádu byl použit atlas Cauchyův, jehož existence je zaručena větami o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy. K cíli disertační práce ale nelze pomocí Cauchyova atlasu dospět, neboť Cauchyova podmínka u rovnic druhého řádu obsahuje derivaci. Pro tyto účely se ukazuje být vhodnější atlas Dirichletův, pro který ale nejsou bohužel známa vhodná existenční tvrzení. Proto je v práci nejprve zformulována a dokázána věta o existenci a jednoznačnosti úplného řešení Dirichletovy úlohy. Na množině všech úplných řešení je pak zaveden Dirichletův atlas, jehož transitní funkce jsou interpretovány jako tok druhého řádu.

4. Výsledky práce

Hlavním výsledkem práce jsou funkcionální rovnice

$$F(\tau,\alpha,\beta,a,b)=F(\tau,\gamma,\delta,F(\gamma,\alpha,\beta,a,b),F(\delta,\alpha,\beta,a,b)),\tag{2}$$

$$F(\alpha,\alpha,\beta,a,b)=a,\quad F(\beta,\alpha,\beta,a,b)=b\tag{3}$$

a vyjasnění jejich vztahu k obyčejným diferenciálním rovnicí druhého řádu (1). Nejdůležitější v práci zavedené definice a v práci dokázaná tvrzení jsou tato:

Uvažujme zobrazení

$$f\colon V\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\tag{4}$$

kde $V\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Dále uvažujme rovnici druhého řádu (1) společně s Dirichletovými podmínkami

$$x(\alpha)=a,\quad x(\beta)=b,\tag{5}$$

kde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$, $a,b\in\mathbb{R}^n$. Konečně uvažujme následující ternární relaci: Řekneme, že $\gamma\in\mathbb{R}$ *je mezi* $\alpha\in\mathbb{R}$ a $\beta\in\mathbb{R}$ platí-li $(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)\geq 0$.

Věta o existenci a jednoznačné určenosti řešení Dirichletovy úlohy: *Nechť* (4) *je hladké zobrazení. Pak existuje taková otevřená množina $U\subset V\times V$, že*

a) pro každé $((\alpha,a),(\beta,b))\in U$ má Dirichletova úloha (1), (5) *právě jedno úplné (to je neprodloužitelné) řešení splňující podmínku*

$$((\rho,x(\rho)),(\sigma,x(\sigma)))\in U\tag{6}$$

pro všechna navzájem různá ρ, σ mezi α, β,

b) každé úplné řešení x rovnice (1) *splňuje podmínku* (6) *pro všechna navzájem různá ρ, σ mezi nějakými navzájem různými $\alpha,\beta\in\operatorname{dom}x$.*

V dalším práce definuje pojem toku obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, který umožňuje najít funkcionální ekvivalent k libovolné hladké diferenciální rovnici (1), (4).

Nechť je $U \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ otevřená množina. Ke každému $((\alpha, a), (\beta, b)) \in U$ uvažujeme otevřený interval $J(\alpha, \beta, a, b) \subset \mathbb{R}$. Množinu všech $(\tau, \alpha, \beta, a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ takových, že $\tau \in J(\alpha, \beta, a, b)$, budeme nazývat *intervalový bandl nad bází* U, množinu U budeme nazývat *báze* intervalového bandlu a každý interval $J(\alpha, \beta, a, b)$ budeme nazývat *fibr nad bodem* $((\alpha, a), (\beta, b)) \in U$.

Řekneme, že zobrazení F je *tok obyčejné diferenciální rovnice* (1) pokud

i) definiční obor zobrazení F je intervalový bandl nad bází $U \subset V \times V$ a obor hodnot zobrazení F je $\mathbb{R}^n$,

ii) každé parciální zobrazení

$$x\colon J(\alpha, \beta, a, b) \ni \tau \mapsto F(\tau, \alpha, \beta, a, b) \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

kde $J(\alpha, \beta, a, b)$ je fibr nad bodem $((\alpha, a), (\beta, b)) \in U$, je jediným úplným řešením rovnice (1) splňujícím podmínky (5), (6),

iii) každé úplné řešení obyčejné diferenciální rovnice (1) lze při vhodné volbě α, β, a, b zapsat ve tvaru (7).

Tvrzení 1: *Ke každé obyčejné diferenciální rovnici* (1) *s hladkou pravou stranou* (4) *existuje její tok, který je hladký a jehož definiční obor je otevřená množina.*

Tvrzení 2: *Nechť F je tok obyčejné diferenciální rovnice* (1) *s hladkou pravou stranou* (4)*, jehož definiční obor má bázi $U \subset V \times V$ a nechť dále $((\alpha, a), (\beta, b)) \in U$. Pak platí*

$$F(\alpha, \alpha, \beta, a, b) = a, \quad F(\beta, \alpha, \beta, a, b) = b, \tag{8}$$

$$(\tau, F(\tau, \alpha, \beta, a, b)) \in V, \tag{9}$$

$$((\rho, F(\rho, \alpha, \beta, a, b)), (\sigma, F(\sigma, \alpha, \beta, a, b))) \in U \tag{10}$$

pro všechna navzájem různá ρ, σ mezi α, β a všechna τ pro která levá strana (9) *existuje. Pokud je kromě toho* (10) *splněno i pro všechna navzájem různá ρ, σ mezi nějakými navzájem různými γ, δ, platí také*

$$F(\tau, \gamma, \delta, F(\gamma, \alpha, \beta, a, b), F(\delta, \alpha, \beta, a, b)) = F(\tau, \alpha, \beta, a, b) \tag{11}$$

pro všechna τ pro která levá strana (11) *existuje.*

Pokud v Dirichletových podmínkách $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ připustíme rovnost $\alpha = \beta$, nebude mít příslušná Dirichletova úloha jednoznačné řešení. Pro $a \neq b$ nebude mít řešení vůbec žádné a pro $a = b$ jich bude naopak mít nekonečně mnoho. Z toho důvodu nemohou body $(\tau, \alpha, \alpha, a, b)$ ležet v definičním oboru toku druhého řádu. Z podmínky (6) ve větě o existenci a jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy je ale vidět, že pro každé $(\alpha, a) \in V$ leží bod $((\alpha, a), (\alpha, a))$ na hranici $\mathrm{fr}U$ otevřené množiny U, takže bod $(\alpha, \alpha, \alpha, a, a)$ leží na hranici $\mathrm{fr}\,\mathrm{dom}\,F$ definičního oboru $\mathrm{dom}\,F$ toku druhého řádu F. Bohužel hladké zobrazení F není možné do takového bodu hladce rozšířit z toho důvodu, že jeho parciální derivaci podle prvního argumentu tam nelze rozšířit spojitě. Řekneme, že tok druhého řádu F má v každém bodě $(\alpha, \alpha, \alpha, a, a)$ takovém, že $(\alpha, a) \in V$, *singularitu* a zkoumáme chování toku druhého řádu v okolí této singularity z hlediska hladké rozšiřitelnosti.

Věta o chování toku rovnice druhého řádu v okolí singularity: *Nechť F je tok obyčejné diferenciální rovnice* (1) *s hladkou pravou stranou* (4). *Pak existuje takové hladké zobrazení S, že $\mathrm{dom}\,S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\{0\} \times \{0\} \times V \times \mathbb{R}^n \subset \mathrm{dom}\,S$, $\mathrm{codom}\,S = \mathbb{R}^n$ a pro každé $(\omega, \varepsilon, \alpha, a, v) \in \mathrm{dom}\,S$, $\varepsilon \neq 0$ platí*

$$S(\omega, \varepsilon, \alpha, a, v) = F(\alpha + \omega, \alpha, \alpha + \varepsilon, a, a + v\varepsilon). \tag{12}$$

Řekneme, že zobrazení F je *tok druhého řádu na V* pokud existuje takové hladké zobrazení (4), že F je tok s ním spojené obyčejné diferenciální rovnice (1).

Věta o funkcionální charakterizaci toku druhého řádu: *Hladké zobrazení F je tok druhého řádu na otevřené množině $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ právě když splňuje podmínky* (8) *až* (12) *a jeho definiční obor je intervalový bandl s bází $U \subset V \times V$.*

Tvrzení 3: *Nechť F je tok rovnice* (1) *s hladkou pravou stranou* (4), *U báze definičního oboru toku F, $J \subset \mathbb{R}$ otevřený interval. Zobrazení $x\colon J \to \mathbb{R}^n$ je řešením rovnice* (1) *právě když pro každá navzájem různá γ, δ mezi nimiž splňuje podmínku* (6) *a každé $\tau \in J$ vyhovuje i rovnici*

$$F(\tau, \gamma, \delta, x(\gamma), x(\delta)) = x(\tau).$$

5. Závěry pro další rozvoj disciplíny

Uvedené funkcionální rovnice (2), (3) zahrnují různé významné speciální případy. V předložené disertační práci je zaveden a podrobně studován takzvaný D-řešitelný případ, kdy $U = \{((\alpha, a), (\beta, b)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) | \alpha \neq \beta\}$. Kromě souvislosti s diferenciálními rovnicemi druhého řádu (1) jsou tyto funkcionální rovnice v práci uvedeny i do souvislosti s Jensenovou funkcionální rovnicí [2], funkcionální rovnicí pro kuželosečky [3], Stephanosovou funkcionální rovnicí [7], Einsteinovým principem ekvivalence [9], Lobačevského planimetrií [10] a s funkcionálními rovnicemi pro geodetiky [15]. Odtud je patrné, že funkcionální rovnice (2), (3) umožňují zaujmout sjednocující hledisko k dosti širokým třídám diferenciálních, diferenčních a funkcionálních rovnic. Jsou také vhodným východiskem pro studium toků druhého řádu a neautonomních dynamických systémů druhého řádu.

6. Prezentace

Autorovo vystoupení s příspěvkem *Funkcionální formulace obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu v normálním tvaru* na Semináři z diferenciální geometrie a globální analýzy na Matematickém ústavu Slezské univerzity v Opavě dne 15. 5. 2003.

7. Autorovy publikace

1. P. Chládek, *The functional formulation of second-order ordinary differential equations.* Preprint GA 5/2003, Mathematical Institute, Silesian University at Opava, 2003, (Elektronická verze: http://www.arxiv.org/abs/math.CA/0310443).
2. P. Chládek, L. Klapka, *The Cauchy atlas on the manifold of all complete ODE solutions.* Preprint GA 12/2003, Mathematucal Institute, Silesian University at Opava, 2003, (Elektronická verze: http://www.arxiv.org/abs/math.CA/0312317).
3. P. Chládek, *The functional formulation of second-order ordinary differential equations.* Aeq. Math. 69 (2005), No. 3, 263-270.
4. P. Chládek, L. Klapka, C. Udriste, *Cauchy atlas on the manifold of all maximal solutions of an ODE system.* Balc. Jour. Geom. Appl., přijato do tisku.

8. Přehled použité literatury

[1] Abdelkader, M.A., *A functional equation method for ordinary differential equations.* J. Math. Anal. Appl. 34 (1971), 13-18.

[2] Aczél, J., *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, New York and London, 1966.

[3] Angelesco, A., *Sur une propriété fonctionnelle des coniques.* Compt. Rend. Acad. Sci. 175 (1922), 666-668.

[4] Balibrea, F., Reich, L., Smítal, J., *Iteration Theory: Dynamical systems and Functional Equations.* Int. J. Bifurcation and Chaos 13 (2003), 1627–1647.

[5] Arnold, V.I., *Ordinary differential equations* (3rd edition). (Russian), Moscow: Nauka, 1984.

[6] Bourbaki, N., *General topology.* (Russian), Moscow: Nauka, 1968.

[7] Castillo, E., Ruiz-Cobo, R., *Functional equations and exact discrete solutions of ordinary differential equations.* World Scientific, Singapore, 1994, 75-92.

[8] Curtiss, D.R., *Relations between the Gramian, the Wronskian and a third determinant connected with the problem of linear independence.* Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1910), 462-467.

[9] D'Inverno, R., *Introducing Einstein's relativity.* Clarendon Press, Oxford, 1992.

[10] Efimov, N.V., *Higher geometry.* (Russian), Mir Publisher, Moscow, 1961.

[11] Eshukov, L.N., *On a functional problem for ordinary differential equations.* Am. Math. Soc., Transl., II Ser. 24 (1963), 13-18.
[12] Hartman, P., *Ordinary differential equations.* John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1964.
[13] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press, New York, 1978.
[14] 't Hooft, G., *Introduction to general relativity.* Rinton Press, Princeton, NJ, 2001.
[15] Klapka, L., *The functional definition of generalized geodesics.* Aequationes Math. 59, No.3 (2000), 201-213.
[16] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of differential geometry.* Vol. I, Interscience Publishers, New York-London, 1963.
[17] Lang, S., *Differential and Riemannian manifolds* (3rd ed.). Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.
[18] Lee, J.M., *Introduction to smooth manifolds.* Springer, New York, 2002.
[19] Levi-Civita, T., *Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo* $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)Y_i(y)$. Atti. Accad. Nazl. Lincei, Rend. 5-22, Pt. 2 (1913), 181-183.
[20] Mattuck, A., *Introduction to analysis.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
[21] Munkres, J.R., *Analysis on manifolds.* Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1991.
[22] Narasimhan, R., *Analysis on Real and Complex Manifold* (3rd printing). North-Holland Mathematical Library, Amsterdam-New York-Oxford, Vol. 35, 1985.
[23] Neuman, F., *Smoothness versus discreteness.* In: Kočandrlová, M., Kelar, V., Proc. Int. Conf. Mathematical and Computer Modelling in Science and Engineering, Jednota českých matem. fyz., Prague 2003, 272-276.
[24] Olver, P., *Applications of Lie groups to differential equations* (2nd edition). New York: Springer-Verlag, 1993.
[25] Pontrjagin, L.S., *Ordinary differential equations.* (Russian), Moscow: Nauka, 1965.
[26] Schwartz, L., *Analyse mathematique I.* (Russian), Mir Publisher, Moscow, 1972.
[27] Stäckel, P., *Sulla equazione funzionale* $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)Y_i(y)$. Atti. Accad. Nazl. Lincei, Rend. 5-22, Pt. 2 (1913), 392-393.
[28] Whitehead, J.H.C., *Convex regions in the geometry of paths.* Q. J. Math 3 (1932), 33-42.

9. Resumé

The functional equations $F(\alpha,\alpha,\beta,a,b) = a$, $F(\beta,\alpha,\beta,a,b) = b$, $F(\tau,\alpha,\beta,a,b) = F(\tau,\gamma,\delta,F(\gamma,\alpha,\beta,a,b),F(\delta,\alpha,\beta,a,b))$ are deduced in the Ph.D. thesis. There are discovered the conditions in order that the functional equations be equivalent to the second-order ordinary differential equations $\ddot{x} = f(\tau,x,\dot{x})$ with a smooth mapping f. In this way, the foundation of the second-order flow theory is developed. Some special cases of the introduced functional equations are presented. These are the Jensen functional equation, the functional equation for conic sections, the Stephanos functional equation, the functional equations for straight lines in the Lobachevsky plane and the functional equations for geodesics.