MATEMATICKÉ BESEDY

PIATOK 8.10.2010

(1) Dokážte, že pre všetky trojice reálnych čísel x, y, z platí nerovnosť

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

Riešenie: Upravíme na tvar

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \geq 0$$

a z toho to už plynie

(necháme ich na to prísť - prípadne s pomocou?)

(2) Dokážte, že pre všetky trojice reálnych čísel x, y, z platí nerovnosť

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2x+2y+2z-3$$

Riešenie: Upravíme na tvar

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0$$

(3) V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\sqrt{x^2+y} = y+1$$
$$\sqrt{y^2+x} = x+1$$

Umocnením dostaneme

$$(*) \quad x^2+y = y^2+2y+1$$
$$y^2+x = x^2+2x+1$$

Odčítaním týchto rovníc máme

$$y-2x-1 = 2y-x+1$$
$$-x = y+2$$
$$x = -y-2$$

Dosadením napr. do (*) dostaneme

$$(y+2)^2+y = y^2+2y+1$$
$$y^2+4y+4+y = y^2+2y+1$$
$$3y = -3$$
$$y = -1 \Rightarrow x = 1-2 = -1$$

Dosadením (skúškou) sa presvedčíme, že to je riešenie

? Na rozobratie - <u>prečo?</u> treba urobiť skúšku?
<u>a či?</u>

4) V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$x^2 = 2y - 1$$
$$y^2 = 2x - 1$$

Riešenie: Rovnice sčítame (nemusia na to hneď prísť, necháme ich rozmýšľať) a upravíme na

$$x^2 + y^2 - 2y - 2x + 1 + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

Platí, že $(x-1)^2 \geq 0$ pričom rovnosť nastáva jedine a práve vtedy, keď $x = 1$

podobne $(y-1)^2 \geq 0$ rovnosť $y = 1$

$\Rightarrow$ Jediné riešenie $x = 1$, $y = 1$ skúška (treba?)

---

5) V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$x + y = z^2 + 1$$
$$y + z = x^2 + 1$$
$$z + x = y^2 + 1$$

Riešenie: Rovnice sčítame a upravíme na tvar

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z - 3 = 0$$

podľa príkladu 2 to je ekviv. k

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$$

pričom výraz na ľavej strane je nulový $\Leftrightarrow$ $x = 1$, $y = 1$ a $z = 1$ skúška (treba?)

6 V obore reálnych čísel riešte sústavu

$$x^2 = y + z + 1$$
$$y^2 = z + x + 1$$
$$z^2 = x + y + 1$$

Riešenie: Odčítame prvé dve rovnosti a dostaneme $x^2 - y^2 = -(x-y)$

z toho a) $x = y$

b) $x \neq y$ a $x + y = -1$

(Rôzne spôsoby ako ďalej pokračovať, napr. urobím to isté 2+3 a 3+1 rovnica)

a) $x = y$ dosadíme

$$x^2 = x + z + 1$$
$$x^2 = x + z + 1$$
$$z^2 = 2x + 1$$

zasa odčítam

$$x^2 - z^2 = -x + z = -(x-z)$$
$$(x-z)(x+z) = -(x-z)$$

Zasa 2 možnosti

1. $x = z$ Potom $x^2 = 2x + 1$ $\quad x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Dostanem 2 riešenia

$(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ a $(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$

2. $x \neq z$ potom $x + z = -1$ $\quad x = -z - 1$

dosadím $(z+1)^2 = -z - 1 + z + 1$

$$z = -1$$

Potom $x = 1 - 1 = 0$ a $x = y$ (z a)

$\Downarrow$

$(0, 0, -1)$

b) $x \neq y$ $\quad x = -y - 1$ dosadím do 1. rovnice $(y+1)^2 = y$

$$(-y-1)^2 = -y-1+z+1$$

$$(-y-1)^2 = -y+z$$

$$z^2 = \cancel{2} -y-1+y+1=0 \Rightarrow \underline{z=0}$$

$$y^2+2y+1=-y$$

$$z^2 = -y-1+y+1 = 0 \Rightarrow z=0$$

Prvá rovnica: $(y+1)^2 = y+1$

$$y^2+2y+1 = y+1$$

$$y^2+y=0$$

$$y(y+1)=0$$

$y=0 \Rightarrow x=-1$

$y=-1 \Rightarrow x=0$

Ďalšie 2 riešenia

$\boxed{(-1,0,0) \quad a \quad (0,-1,0)}$ smiška (treba?)

---

(7) V obore reálnych čísel riešte sústavu

$$\sqrt{x-y^2} = z-1$$

$$\sqrt{y-z^2} = x-1$$

$$\sqrt{z-x^2} = y-1$$

Riešenie: Umocnením dostaneme

$$x-y^2 = z^2-2z+1$$

$$y-z^2 = x^2-2x+1$$

$$z-x^2 = y^2-2y+1$$

$\boxed{\begin{matrix} z \geq 1 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{matrix}}$

Spočítame a upravíme

$$-(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z) = x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+3$$

$$2(x^2+y^2+z^2)-3(x+y+z)+3=0$$

Ďaly napríklad tak, že

si uvedomím, že výrazy pod $\sqrt{\ }$ ≥ 0 $\Rightarrow$

$$x \geq y^2$$
$$y \geq z^2$$
$$z \geq x^2$$

Potom

$$2(x+y+z) \geq 2(x^2+y^2+z^2)$$

čiže z predošlého dostaneme

$$-(x+y+z) + 3 \geq 0$$

$$3 \geq x+y+z$$

a keďže $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$

máme jediné riešenie

$$x = y = z = 1$$

rôzne spôsoby

[59-A-S-1]

---

(8) Určite všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2$$

Riešenie:

Rovnice spočítam

$$x^2 + xy + z^2 + zy = 2y^2 + z^2 + x^2 \Rightarrow y(x+z) = 2y^2$$

$\Rightarrow$ $y = 0 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow$ $(a, 0, \pm a)$

$\Downarrow$ $y \neq 0 \Rightarrow 2y = x + z$ $\quad y = \frac{1}{2}(x+z)$ dosadíme do 1. rovnice

$x^2 + \frac{x(x+z)}{2} = \frac{1}{4}(x^2+2xz+z^2) + z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow \begin{matrix} x = z \\ x = -z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (x, 0, -x) \\ (x, x, x) \end{matrix}$ → to sme už našli