

## Posudok na dizertačnú prácu

Veronika Kurková:

### Solution of open problems in low-dimensional dynamics

#### 1. Úvod

Dizertačná práca je o topologickej dynamike spojitých zobrazení. Skúmajú sa tzv. trojuholníkové zobrazenia štvorca a zobrazenia grafov a dendritov. Čo sa týka trojuholníkových zobrazení, ide o nadviazanie na výskum, ktorý má v Opave dlhoročnú tradíciu a ide už o hlboko rozpracovanú problematiku. Topologická dynamika na grafoch je tiež téma, ktorá je bežná vo svete i u nás. O dynamike na dendritoch sa však zatiaľ vie veľmi málo.

#### 2. O obsahu dizertačnej práce

Dizertačná práca je zjednotením štyroch článkov opatrených spoločným komentárom, pričom dva sú samostatné a dva napísané v spoluautorstve s Kočanom a Málekom. Ide o články:

- [1] V. Kornecká: *A classification of triangular maps of the square*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 75 (2006), no. 2, 241–252.

V článku sa v triede trojuholníkových zobrazení štvorca skúmajú implikácie medzi deviatimi dynamickými vlastnosťami, ktoré sú vybraté spomedzi tých, čo sú ekvivalentné pre intervalové zobrazenia (ide o vlastnosti ako nulová topologická entropia, neexistencia homoklinickej trajektórie apod.). Autorka o každej z implikácií rozhodla, či je pravdivá alebo nie. Článok tak predstavuje príspevok k programu vytýčenému v osemdesiatych rokoch Šarkovským.

- [2] V. Kornecká: *On a problem of Sharkovsky concerning the classification of triangular maps*, Iteration theory (ECIT '06), 91–99, Grazer Math. Ber., 351, Institut für Mathematik, Karl-Franzens-Universität Graz, Graz, 2007.

V tejto práci autorka pokračuje vo výskume z predchádzajúceho článku, uvažuje ďalšie dynamické vlastnosti ekvivalentné pre intervalové zobrazenia a skúma implikácie medzi nimi v triede trojuholníkových zobrazení. Podobne ako v predchádzajúcom článku, opäť o každej z nich rozhodla, či je pravdivá alebo nie.

- [3] Z. Kočan, V. Kornecká-Kurková, M. Málek: *On the centre and the set of  $\omega$ -limit points of continuous maps on dendrites*, Topology Appl. (2009), doi:10.1016/j.topol.2009.02.008

V práci sa konštruujú dva kontrapríklady na dendritoch. V prvom z nich má spojitě zobrazenie dendritu tú vlastnosť, že množina  $\omega$ -limitných bodov je vlastná podmnožina centra (čiže uzáveru množiny rekurentných bodov). Pritom sa vie, že na grafoch je práve naopak, centrum vždy podmnožinou množiny  $\omega$ -limitných bodov. Z druhého kontrapríkladu, ktorý autori konštruujú, vyplýva, že pre spojitě zobrazenie dendritu priestor jeho  $\omega$ -limitných množín s Hausdorffovou metrikou nemusí byť úplný. Pritom pre zobrazenia intervalu tento priestor je vždy kompaktný, ako ukázali Blokh, Bruckner, Humke a Smítal (a na grafy neskôr rozšírili Mai a Shao).

- [4] Z. Kočan, V. Kornecká-Kurková, M. Málek: *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites*, Ergodic Theory Dynam. Systems, to appear.

V tomto článku autori skúmajú tri rôzne druhy podkov a dva rôzne druhy homoklinických trajektórií. Zaujíma ich existencia niektorej homoklinickej trajektórie pre zobrazenie a existencia niektorej podkovy pre iteráciu zobrazenia. Ukázali, že na stroch je ich existencia ekvivalentná s kladnou entropiou (čo bolo dobre známe na intervale a niektoré implikácie aj na grafoch) a preskúmali pravdivosť resp. nepravdivosť všetkých implikácií na grafoch. Pravdivosť resp. nepravdivosť týchto implikácií sa im podarilo čiastočne preskúmať aj na dendritoch, tam však zostali otvorené problémy.

### 3. Hodnotenie kvality dizertačnej práce

Najskôr uvediem niektoré konkrétne pripomienky, ktoré mám k dizertácii:

Angličtina je dobrá, ale nájdu sa chyby. Napr. plurál ku 'continuum' (str. 12) je 'continua' a nie 'continuums'.

O podmienkach na strane 2 a 3 sa hovorí, že podmienky v jednotlivých skupinách sú ekvivalentné pre zobrazenia metrických kompakto (píše sa o "classes of equivalence" pre " $f \in C(X)$ "). Asi ide o omyl, predpokladám, že autorka mala na mysli fakt, že ich ekvivalencia je dokázaná na intervale.

Na strane 3, v podmienke (23) sa uvažuje "almost" konjugácia, čo je *špeciálny* prípad semikonjugácie. Podmienka sa potom aplikuje na trojuholníkové zobrazenia. Možno by bolo prirodzené uvažovať, aké miesto by prislúchalo analogickej podmienke, v ktorej sa uvažuje o všeobecnej semikonjugácii.

Na str. 4 (a tiež v článku [2] na str. 93) mám problém s tým, ako sú sformulované definície silnej a slabej aproximovateľnosti. Nie je pri *takto* sformulovaných definíciách  $\varepsilon$ -aproximovateľnosti pravda, že silná aproximovateľnosť je ekvivalentná so slabou?

Na strane 5 (a inde v práci) sa formálne chybné uvádza, že vláknové zobrazenie  $g_x$  zobrazuje vlákno  $\{x\} \times I$  do  $I$ . V skutočnosti zobrazuje  $I$  do  $I$ .

Ak sa na str. 9 uvádza, že chýbajúce implikácie na obr. 2 sú nepravdivé alebo nie je známe, či platia, tak čitateľ nevyhnutne napadne, že to je dost' veľký rozdiel a iste by chcel vedieť, ktorá chýbajúca implikácia je aká.

K Vete 3.3 a tabuľke 1 na str. 10: Ak napr. pri implikácii  $1 \Rightarrow 5$  nie je *nič* uvedené, čo to znamená?

Keď sa na str. 13 a v článku [4] hovorí o koncových bodoch kontinua, patrilo by sa uviesť definíciu. Tiež mám pocit, že tvrdenie, že 'endpoint intersection horseshoe' na dendrite je 'finite intersection horseshoe' by malo byť zdôvodnené. Na všeobecných jednorozmerných kontinuuach také tvrdenie neplatí, preto treba dokázať, prečo platí na dendritoch.

V súvislosti s rôznymi druhmi podkov, ktoré autorka uvažuje, ma napadá, že Bobok skúmal (aspoň na intervale) podkovy všeobecnejšieho typu, aj s nekonečnými prienikmi množín  $A$  a  $B$ , používal pojem 'kernel of a horseshoe'. Je autorka oboznámená s touto teóriou?

Keďže v článku [4] sú dosiahnuté výsledky pre grafy aj pre dendrity, je prirodzená otázka, či niektoré výsledky nemožno bez väčšej námahy preniesť na lokálne dendrity. Aký názor má autorka?

Dizertačná práca je kombináciou viet a dômyselných kontrapríkladov. Od autorky si vyžiadala slušnú znalosť teórie diskretných dynamických systémov, najmä metód topologickej a symbolickej dynamiky. Práca prináša nové vedecké výsledky a prispieva tak k lepšiemu pochopeniu teórie. Je nesporné, že autorka dizertačnej práce preukázala schopnosť samostatnej vedeckej práce a dosiahla hodnotné vedecké výsledky. Preto vyslovujem nasledujúci záver.

#### 4. Záver

**Odporúčam, aby bol Veronike Kurkovej udelený titul "PhD".**



Banská Bystrica, 6. 9. 2009

Prof. RNDr. Ľubomír Snoha, DSc., DrSc.  
Katedra matematiky  
Fakulta prírodných vied  
Univerzita Mateja Bela  
Tajovského 40  
974 01 Banská Bystrica