

Posudok na dizertačnú prácu  
Lenka Obadalová-Rucká:  
Irregular recurrence in compact metric spaces

## 1. Úvod

Dizertačná práca patrí do oblasti topologickej dynamiky spojitých zobrazení kompaktných metrických priestorov. Je monotematická, študuje iregulárne rekurentné body, najmä súvis medzi existenciou takýchto bodov a dôležitými vlastnosťami systému (chaos, entropia, špeciálne invariantné miery).

## 2. O obsahu dizertačnej práce

Dizertačná práca je súborom nasledujúcich troch článkov, ktoré sú opatrené spoločným komentárom (tým myslím všetko okrem reprintov troch článkov).

- [1] L. Obadalová, J. Smítal, *Distributional chaos and irregular recurrence*, Nonlinear Anal. 72 (2010), no. 5, 2190–2194.

Hlavným spomedzi výsledkov tejto práce je, že existencia iregulárne rekurentného bodu a distribučný chaos DC1 sú nezávislé (dokonca aj v triede trojuholníkových zobrazení štvorca).

- [2] L. Obadalová, J. Smítal, *Counterexamples to the open problem by Zhou and Feng on the minimal centre of attraction*, Nonlinearity 25 (2012), no. 5, 1443–1449.

Tu sa, pre bod  $x$ , študuje množina  $\mathcal{M}_x$  tých invariantných (pravdepodobnostných) mier, ktoré sú limitnými bodmi postupnosti mier získaných ako aritmetické priemery atomických (pravdepodobnostných) mier sediacich na bodoch vždy dlhšieho a dlhšieho počiatočného úseku trajektórie bodu  $x$ . Riešiac problém sformulovaný Zhouom a Fengom v r. 2004, študuje sa tu, či sa pre iregulárne rekurentný bod  $x$  nájde v  $\mathcal{M}_x$  aspoň jedna taká miera, ktorej suport sa zhoduje s  $C_x$ , tzv. minimálnym centrom pritahovania bodu  $x$  (nazvime na chvíľu také miery peknými, ostatné miery v  $\mathcal{M}_x$  škaredými.). Z práce Zhoua a Fenga bolo známe, že ak  $x$  je iregulárne rekurentný, tak  $\mathcal{M}_x$  je viac ako jednoprvková a existuje v nej škaredá miera, teda prípadnú peknú mieru tam treba naozaj “hládat”. Zhou a Feng tiež vedeli, že ak je rekurencia “horšia” ako iregulárna, tak všetky miery v  $\mathcal{M}_x$  sú škaredé a ak je rekurencia “lepšia”, tak zase všetky miery v  $\mathcal{M}_x$  sú pekné. Ostalo tak vyriešiť hraničný prípad iregulárnej rekurenčie. To sa uchádzačke s jej školiteľom aj podarilo. Ukázali na príklade, že iregulárna rekurencia je už dost’ zlá na to, aby sa *mohlo stat'*, že všetky miery v  $\mathcal{M}_x$  sú škaredé. Našli aj charakterizáciu tých iregulárne rekurentných bodov  $x$ , ktoré majú v  $\mathcal{M}_x$  aspoň jednu peknú mieru a udali príklad takej situácie, teda iregulárne rekurentný bod  $x$  majúci v  $\mathcal{M}_x$  popri škaredých mierach aj pekné miery.

Je tu tiež uvedená súčasťne veľmi jednoduchá, ale mám pocit, že pre vhlásenie do problematiky iregulárnej rekurenčie dosť podstatná Lema 1, umožňujúca skúmať iregulárnu rekurenčiu na takpovediac ‘jednoduchšej’ úrovni ako by naznačovala pôvodná definícia.

- [3] L. Obadalová, *Irregular recurrence in compact metric spaces*, zaslané do tlače.

V tomto článku sa vyšetrujú vlastnosti množiny všetkých iregulárne rekurentných bodov. Dokazuje sa tiež, že subshift s iregulárne rekurentným bodom môže mať nulovú entropiu, čo dáva odpoveď na otázku Zhou a Liho z r. 2009.

### 3. Hodnotenie kvality dizertačnej práce

Najskôr uvediem niektoré konkrétné pripomienky, ktoré mám k dizertácii. Ide najmä o zbytočné chyby v úvodnom spoločnom komentári k trom článkom.

Čo sa týka angličtiny, autorka dosť často v spoločnom komentári k trom článkom nesprávne používa, prípadne vôbec nepoužíva, členy. Je tam tiež niekoľko nedostatkov spôsobených asi tým, že si to autorka po sebe poriadne neprečítala. Uvediem niektoré:

Na str. 3 v Corollary 1 vypadlo  $f$  a v definícii "If  $\Phi_{xy}(t) \leq \Phi_{xy}^*(t)$  for all  $t$  in the interval, we write  $\Phi_{xy} \leq \Phi_{xy}^*$ " je hned' niekoľko chyb (o akom intervale je reč, keď je použitý určitý člen?; uvedená nerovnosť platí vždy; malo zrejme íst' o definícii ostrej nerovnosti a nie neostrej). Nemá v definícii (DC1) byť "for some  $t > 0$ " namiesto "for any  $t > 0$ "?

Na str. 4 autorka tvrdí, že "For continuous maps on the interval ... positive topological entropy, ..., Li-Yorke chaos ... are equivalent", čo nie je pravda a malo by to aj autorke byť notoriicky známe. Vo Vete 4 sa tvrdí, že pre spojité zobrazenie metrického kompaktu existencia iregulárne rekurentného bodu implikuje Li-Yorkov chaos (ten autorka na str. 3 definovala ako existenciu *nespočítateľnej* chaotickej množiny). To však nezodpovedá tomu, čo je v práci [1] naozaj dokázané.

Vo Vete 6 by bolo podľa mňa správnejšie vravieť "For triangular maps" namiesto "For any triangular map  $f$ ".

Na str. 5 sa do definície invariantnej pravdepodobnostnej miery vlúdil nejaký nezmysel, akoby z definície ergodickej miery.

Na str. 6, dva riadky nad formulou (11) treba vyhodiť slovo "positive".

Celkovo sa mi dizertačná práca páči, venuje sa podľa môjho názoru zaujímavej téme a čo zvlášť oceňujem, dotýka sa mnohých klúčových pojmov teórie dynamických systémov (chaos, entropia, invariantné miery, rekurencia, ...), je v tomto zmysle rôznorodá napriek svojej monotonematičnosti. V spoločnom komentári mohlo byť vysvetlené, prečo sú dôležité resp. zaujímavé práve invariantné miery, ktoré som vyššie nazval peknými.

V dizertačnej práci sú vyriešené niektoré netriviálne problémy, najmä formou komplikovaných kontrapríkladov. Ich nájdenie si vyžadovalo veľmi dobrú znalosť najmä metód symbolickej a topologickej dynamiky. Uchádzačka preukázala široký rozhlás v dynamike (predpokladám, že v spoločných prácach má primeraný podiel). Práca splňa požiadavky kladené na dizertačné práce.

### 4. Záver

Odporučam, aby bol Lenke Obadalovej-Ruckej po úspešnej obhajobe udelený titul "PhD".

Talca, 26. 10. 2012

Prof. RNDr. Ľubomír Snoha, DrSc.