Michal Marvan, Matematický ústav
Slezská univerzita v Opavě

# 6. Součiny

**Definice.** Buďte $(A,(\alpha)_{i\in I})$, $(B,(\beta)_{i\in I})$ dvě algebry signatury $(I,n)$. Na kartézském součinu $A\times B$ množin $A,B$ zaveďme algebraické operace $\delta_i$, $i\in I$, předpisem

1. Je-li $n_i=0$, pak klademe $\delta_i=(\alpha_i,\beta_i)$.
2. Je-li $n_i>0$, pak pro libovolnou $n_i$-tici $(a_1,b_1)$, …, $(a_{n_i},b_{n_i})$ prvků z $A\times B$ klademe

$$\delta_i\big((a_1,b_1),\dots,(a_{n_i},b_{n_i})\big)=\big(\alpha_i(a_1,\dots,a_{n_i}),\beta_i(b_1,\dots,b_{n_i})\big).$$

Algebra $(A\times B,(\delta)_{i\in I})$ se nazývá *kartézský součin* algeber $A,B$.

**Tvrzení.** *Buďte $(A,(\alpha)_{i\in I})$, $(B,(\beta)_{i\in I})$ dvě algebry signatury $(I,n)$, buď $(A\times B,(\delta)_{i\in I})$ jejich kartézský součin.*

(1) *Zobrazení $\mathrm{pr}_1:A\times B\to A$, $\mathrm{pr}_1(a,b)=a$ a zobrazení $\mathrm{pr}_2:A\times B\to B$, $\mathrm{pr}_2(a,b)=b$ jsou homomorfismy.*

(2) *Buď $(C,(\gamma)_{i\in I})$ nějaká algebra téže signatury $(I,n)$, buďte $f_1:C\to A$, $f_2:C\to B$ homomorfismy. Pak existuje právě jedno zobrazení $f:C\to A\times B$ takové, že $\mathrm{pr}_1\circ f=f_1$, $\mathrm{pr}_2\circ f=f_2$ a toto zobrazení je homomorfismem algeber.*

**Důkaz.** (1) Cvičení.

(2) Existence zobrazení $f$. Pro $c\in C$ položme $f(c)=(f_1(c),f_2(c))\in A\times B$. Vztahy $\mathrm{pr}_1\circ f=f_1$, $\mathrm{pr}_2\circ f=f_2$ se ověří snadno. Důkaz, že $f$ je homomorfismem je užitečné cvičení.

Jednoznačnost. Buďte $f,f':C\to A\times B$ zobrazení taková, že platí $\mathrm{pr}_1\circ f=\mathrm{pr}_1\circ f'$, $\mathrm{pr}_2\circ f=\mathrm{pr}_2\circ f'$. Máme ukázat, že $f=f'$. Buď $c\in C$ libovolné. Pak $f(c)\in A\times B$, a tedy $f(c)=(a,b)$ pro nějaká $a\in A$ a $b\in B$. Podobně $f'(c)\in A\times B$, a tedy $f'(c)=(a',b')$ pro nějaká $a'\in A$ a $b'\in B$. Pak $a=\mathrm{pr}_1(a,b)=\mathrm{pr}_1(f(c))=\mathrm{pr}_1(f'(c))=\mathrm{pr}_1(a',b')=a'$, a podobně $b=\mathrm{pr}_2(a,b)=\mathrm{pr}_2(f(c))=\mathrm{pr}_2(f'(c))=\mathrm{pr}_2(a',b')=b'$.

**Příklad.** Uvažujme o grupě $(\mathbf{Z}_2,+,0,-)$. Kartézský součin $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$ je opět grupa. (Dokažte.) Nazývá se *Kleinova grupa.*

Existuje jednoduchý způsob, jak definovat kartézský součin libovolného (i nekonečného) systému množin.

**Definice.** Buď $\{A^{(j)}\}_{j\in J}$ nějaký systém množin. Kartézským součinem toho systému rozumíme množinu

$$\prod_{j\in J}A^{(j)}=\Big\{a:J\to\bigcup_{j\in J}A^{(j)}\ \Big|\ \forall_{j\in J}a(j)\in A^{(j)}\Big\}.$$

Obecným prvkem takového kartézského součinu je zobrazení $a$, které stručně a výstižně nazýváme $J$-tice. Zadat takové zobrazení znamená přesně totéž, co zadat pro každé $j\in J$ po jednom prvku $a(j)\in A^{(j)}$.

**Tvrzení.** *Je-li množina $J$ konečná, $J=\{j_1,\dots,j_m\}$, a $m\ge 1$, pak existuje bijekce*

$$\prod_{j\in J}A^{(j)}\to A^{(j_1)}\times\cdots\times A^{(j_m)},$$

*zadaná předpisem $a\mapsto(a^{(j_1)},\dots,a^{(j_m)})$ ($m$-tice prvků $a^{(j_1)}\in A^{(j_1)},\dots,a^{(j_m)}\in A^{(j_m)}$).*

Tato bijekce nám umožňuje ztotožnit kartézský součin $\prod_{j\in J} A^{(j)}$ s obvyklým kartézským součinem $A^{(j_1)} \times \cdots \times A^{(j_m)}$, je-li množina $J$ konečná.

Místo $a(j)$ píšeme $a^{(j)}$ i v případě, že množina $J$ je nekonečná. Prvek $a \in \prod_{j\in J} A^{(j)}$ se pak často výstižně zapisuje jako $(a^{(j)})_{j\in J}$. Tohoto značení se budeme přidržovat i my.

**Definice.** Buď $\{(A^{(j)}, (\alpha_i^{(j)})_{i\in I})\}_{j\in J}$ nějaký systém algeber jedné a téže signatury $(I, n)$. Kartézským součinem toho systému algeber rozumíme algebru $\big(\prod_{j\in J} A^{(j)}, (\delta_i)_{i\in I}\big)$, jejíž operace $\delta_i$ jsou zadány předpisem:

1. Je-li $n_i = 0$, pak klademe $\delta_i = (\alpha_i^{(j)})_{j\in J}$.
2. Je-li $n_i > 0$, pak pro libovolnou $n_i$-tici $(a_1^{(j)})_{j\in J}, \dots, (a_{n_i}^{(j)})_{j\in J}$ prvků z $\prod_{j\in J} A^{(j)}$ klademe

$$\delta_i\big((a_1^{(j)})_{j\in J}, \dots, (a_{n_i}^{(j)})_{j\in J}\big) = \big(\alpha_i^{(j)}(a_1^{(j)}, \dots, a_{n_i}^{(j)})\big)_{j\in J}.$$

Podobně jako v případě dvou algeber se dokazuje následující tvrzení:

**Tvrzení.** *Buď $\{(A^{(j)}, (\alpha_i^{(j)})_{i\in I})\}_{j\in J}$ nějaký systém algeber jedné a téže signatury $(I, n)$.*

*(1) Pro každé $k \in J$ je zobrazení $\mathrm{pr}_k : \prod_{j\in J} A^{(j)} \to A^{(k)}$, $\mathrm{pr}_k((a^{(j)})_{j\in J}) = a^{(k)}$, homomorfismus.*

*(2) Buď $(C, (\gamma)_{i\in I})$ nějaká algebra téže signatury $(I, n)$, buďte $f_j : C \to A^{(j)}$ homomorfismy, pro každé $j \in J$. Pak existuje právě jedno zobrazení $f : C \to \prod_{j\in J} A^{(j)}$ takové, že $\mathrm{pr}_j \circ f = f_j$ pro každé $j \in J$ a toto zobrazení je homomorfismus.*

Přejděme nyní k další konstrukci, ekvalizátoru. Nejdříve dokažme jednoduché tvrzení.

**Tvrzení.** *Buďte $(A, (\alpha)_{i\in I})$, $(B, (\beta)_{i\in I})$ dvě algebry signatury $(I, n)$, buďte $f, g : A \to B$ dva homomorfismy. Pak je množina $E(f, g) := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ uzavřená.*

**Důkaz.** Pro nulární operace: $f(\alpha_i) = \beta_i = g(\alpha_i)$, a proto $\alpha_i \in E(f, g)$.

Pro operace arity $n_i > 0$: Nechť $a_1, \dots, a_{n_i} \in E(f, g)$, to jest, $f(a_1) = g(a_1)$, $\dots$, $f(a_{n_i}) = g(a_{n_i})$. Pak $f(\alpha_i(a_1, \dots, a_n)) = \beta_i(f(a_1), \dots, f(a_n)) = \beta_i(g(a_1), \dots, g(a_n)) = g(\alpha_i(a_1, \dots, a_n))$, tudíž $\alpha_i(a_1, \dots, a_n) \in E(f, g)$, což se mělo dokázat.

**Definice.** Buďte $(A, (\alpha)_{i\in I})$, $(B, (\beta)_{i\in I})$ dvě algebry signatury $(I, n)$, buďte $f, g : A \to B$ dva homomorfismy. Pak se podalgebra $E(f, g) := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ nazývá *ekvalizátor* homomorfismů $f, g$.

Typické použití ekvalizátoru nalezneme v důkazu následujícího tvrzení.

**Tvrzení.** *Buď $A$ algebra, $X$ její množina generátorů. Buď $B$ jiná algebra a buďte $f, g : A \to B$ dva homomorfismy takové, že $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in X$. Pak je $f = g$.*

**Důkaz.** $E(f, g)$ je právě podmnožina, na níž oba dva homomorfismy nabývají stejných hodnot. Podle zadání potom $X \subseteq E(f, g)$. Protože $E(f, g)$ je podalgebra, platí také $\overline{X} \subseteq E(f, g)$. Ovšem $\overline{X} = A$, protože $X$ generuje $A$, takže vlastně $A \subseteq E(f, g)$. To ale znamená, že $f = g$.

Ekvalizátory mají podobnou vlastnost jako jsme zaznamenali u součinů.

**Tvrzení.** *Buďte $A, B$ algebry signatury $(I, n)$ a buďte $f, g : A \to B$ dva homomorfismy.*

(1) *Vložení $e : E(f, g) \to A$ podalgebry $E(f, g) \subseteq A$ je homomorfismus a splňuje $f \circ e = g \circ e$.*

(2) *Buď $(C, (\gamma)_{i\in I})$ nějaká algebra téže signatury $(I, n)$, buď $h : C \to A$ homomorfismus takový, že $f \circ h = g \circ h$. Pak existuje právě jedno zobrazení $h^{\#} : C \to E(f, g)$ takové, že $e \circ h^{\#} = h$ a toto zobrazení je homomorfismus.*

**Důkaz.** (1) Cvičení.

(2) Existence: Stačí ukaázat, že $\operatorname{Im} h \subseteq E(f, g)$, zobrazení $h^{\#}$ pak získáme ohraničením oboru hodnot zobrazení $h$ na $E(f, g)$. Jednoznačnost snadno plyne z injektivnosti zobrazení $e$.

Součiny a ekvalizátory mají společné zobecnění – tzv. limity diagramů.

**Definice.** Buď dán nějaký systém algeber $\{A^{(j)}\}_{j\in J}$. Buď dále dán nějaký systém homomorfismů $\{f^{(q)}\}_{q\in Q}$ takový, že $f^{(q)} : A^{(z(q))} \to A^{(k(q))}$, kde $z, k : Q \to J$ jsou nějaká dvě zadaná zobrazení. Pak řekneme, že je dán *diagram* algeber. Algebry $A^{(j)}$ nazýváme uzly, homomorfismy $f^{(q)}$ nazýváme šipky daného diagramu. Říkáme též, že šipka $f^{(q)}$ *vychází* z uzlu $A^{(z(q))}$ a *končí* v uzlu $A^{(k(q))}$.

**Tvrzení.** *Buď dán diagram algeber signatury $(I, n)$, v němž $\{(A^{(j)}, (\alpha_i^{(j)})_{i\in I}\}_{j\in J}$ je množina uzlů a $\{f^{(q)}\}_{q\in Q}$ je množina šipek. Označme*

$$L = \Big\{ (a^{(j)})_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A^{(j)} \ \Big| \ \forall_{q\in Q} f^{(q)}(a^{(z(q))}) = a^{(k(q))} \Big\}.$$

*Pak je $L$ podalgebra v $\prod_{j\in J} A^{(j)}$.*

**Důkaz.** Je-li $n_i = 0$, uvažujme o nulární operaci $(\alpha_i)_{i\in I}$ v $\prod_{j\in J} A^{(j)}$. Ověřme, že leží v $L$, tj. že $f^{(q)}(\alpha_i^{(z(q))}) = \alpha_i^{(k(q))}$. To ovšem plyne z definice homomorfismu.

Je-li $n_i > 0$, zvolme libovolnou $n_i$-tici prvků z $L$, to jest, zvolme $J$-tice $(a_1^{(j)})_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A^{(j)}$, $\dots$, $(a_{n_i}^{(j)})_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A^{(j)}$ takové, že $f^{(q)}(a_1^{(z(q))}) = a_1^{(k(q))}$, $\dots$, $f^{(q)}(a_{n_i}^{(z(q))}) = a_{n_i}^{(k(q))}$. Uvažujme o $\delta_i((a_1^{(j)})_{j\in J}, \dots, (a_{n_i}^{(j)})_{j\in J})$, což je, podle definice operace $\delta_i$, totéž co $J$-tice $(\alpha_i^{(j)}(a_1^{(j)}, \dots, a_{n_i}^{(j)}))_{j\in J}$. Naším cílem je ukázat, že leží v $L$, což se snadno ověří výpočtem $f^{(q)}(\alpha_i^{(z(j))}(a_1^{(z(j))}, \dots, a_{n_i}^{(z(j))})) = \alpha_i^{(z(j))}(f^{(q)}(a_1^{(z(j))}), \dots, f^{(q)}(a_{n_i}^{(z(j))})) = \alpha_i^{(k(j))}(a_1^{(k(j))}, \dots, a_{n_i}^{(k(j))})$.

Algebra $L$ se nazývá *limita* daného diagramu. Platí pro ni

**Tvrzení.** (1) *Pro každé $l \in J$ je zobrazení $p_l := \operatorname{pr}_l|_L : L \to A^{(l)}$ homomorfismus a pro všechna $q \in Q$ platí $f^{(q)} \circ p_{z(q)} = p_{k(q)}$.*

(2) *Buď $(C, (\gamma)_{i\in I})$ nějaká algebra téže signatury $(I, n)$, buďte $h_j : C \to A^{(j)}$ homomorfismy takové, že pro všechna $q \in Q$ platí $f^{(q)} \circ h_{z(q)} = h_{k(q)}$. Pak existuje právě jedno zobrazení $h^{\#} : C \to L$ takové, že $p_j \circ h^{\#} = h_j$ pro každé $j \in J$. Toto zobrazení je homomorfismus.*

**Důkaz.** (1) Zobrazení $p_l$ je kompozicí homomorfismu $\operatorname{pr}_l$ s vložením podalgebry $L$, a proto je také homomorfismem. Je dáno formulí $p_l((a^{(j)})_{j\in J}) = a^{(l)}$. Podmínka $f^{(q)} \circ p_{z(q)} = p_{k(q)}$ se ověří výpočtem $f^{(q)}(p_{z(q)}((a^{(j)})_{j\in J})) = f^{(q)}(a^{(z(q))}) = a^{(k(q))} = p_{k(q)}(a^{(j)})_{j\in J}$.

(2) Cvičení. Návod: Uvažujme o zobrazení $h : C \to \prod_{j\in J} A^{(j)}$ indukovaném homomorfismy $h_j$. Je nutno ověřit, že $\operatorname{Im} h \subseteq L$. Pak je možné definovat $h^{\#} : C \to L$ ohraničením oboru hodnot na $L$.