

MATEMATICKÉ BESEDY

7.9.2012

NEROVNOSTI

1. Úloha na rozvíčenie?

Najdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré sa ciferný súčet čísla 2^n rovná 5.

(Deliteľnosť 4, 8, 16, 32, ... zopakovať alebo objaviť?)

2. AG nerovnosť:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{zvolím } a = \sqrt{u}, b = \sqrt{v} \quad , \underline{u, v \geq 0}$$

$$(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geq 0$$

$$u + v - 2\sqrt{uv} \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(u+v) \geq \sqrt{uv}$$

ARITMETICKÝ
PRIEMER

GEOMETRICKÝ
PRIEMER

Iný dôkaz:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

2. Doka'zte (pre a, b, c ľub. kladné reálne čísla)

$$2abc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{AG: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = abc \Rightarrow \text{plynie tvrdenie}$$

$$4. \quad a^4 + b^4 \geq a^3 b + a b^3$$

$$1 \text{ AG: } \frac{a^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4} \geq a b^3$$

$$\frac{a^4 + a^4 + a^4 + b^4}{4} \geq a^3 b$$

$$5. \quad \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

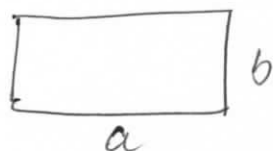
$$a^3 + b^3 \geq a b^2 + a^2 b$$

$$\text{podobne } \frac{a^3 + b^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^6} = a b^2$$

atd.

GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA

②



$2a + 2b$ je ~~obvod~~ obdĺžníka

Obsah ab

štvorec s obsahom ab má stranu $\sqrt{ab}$ a obvod $4\sqrt{ab}$

AG nerovnosť hovorí, že štvorec má najmenší obvod medzi pravouhľovníkmi s rovnakým obsahom

$$2a + 2b \geq 4\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

na n -členov - rozšírenie do n dimenzií.

$$6. \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{8}{(a+b)(c+d)}$$

Upravím na tvar

$$(a+b)(c+d)(cd+ab) \geq 8abcd$$

a použijem 3 AG ~~na~~ ~~na~~

ANO tak.

7. Doka'zte, že pre ľub. kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2}$$

a pre každú nerovnosť zistíte, kedy prechádza v rovnosť.

Riešenie:

Pravá nerovnosť

$$4(a^2 + 3ab + b^2) \leq 5(a+b)^2$$

$$\uparrow$$
$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

$$\text{to platí } (\Leftrightarrow) \underline{\underline{a=b}}$$

Ľavá nerovnosť

Zbavíme sa zlomkov a umocníme na druhú:

$$25ab(a^2 + 2ab + b^2) \leq 4(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 6ab^3 + 2a^2b^2)$$

alebo

$$25ab(a^2 + b^2) + 50a^2b^2 \leq 4a^4 + 4b^4 + 44a^2b^2 + 24ab(a^2 + b^2)$$

alebo

$$4a^4 + 4b^4 - 6a^2b^2 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$4(a^2 - b^2)^2 \geq ab(a-b)^2$$

$$4(a-b)^2(a+b)^2 \geq ab(a-b)^2$$

$a=b$ rovnosť.

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad 4(a+b)^2 \geq ab \quad (\Leftrightarrow) \quad 4a^2 + 4b^2 + 7ab \geq 0 \quad \text{platí}$$

$$8. (1+a+b)^2 \geq 3(a+b+ab)$$

3

$$1+a^2+b^2+2a+2b+2ab \geq 3a+3b+3ab$$

$$a^2+b^2+1 \geq a+b+ab$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^2+1}{2} \geq a \quad \frac{b^2+1}{2} \geq b \\ \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \end{array} \right\} \text{dokopy to zlozím}$$

$$9. (a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a}) \geq 8$$

$$(ab+1)(bc+1)(ca+1) \geq 8abc$$

podobne