Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2002/2003
Michal Marvan

12. Frobeniova věta a hodnost matice

Úvodem shrňme poznatky o soustavách lineárních rovnic, které jsme uvedli v předchozích přednáškách. Buď dána soustava m lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + {} & a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + {} & a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots & \\ a_{r1}x_1 + {} & a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{1}$$

o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se nazývá *matice soustavy*, matice

$$\bar A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

se nazývá *rozšířená matice soustavy.* Soustavu můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$Ax = b,$$

kde

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

je sloupec pravých stran a sloupec neznámých.

Již dříve jsme se také seznámili s tzv. eliminační metodou, kterou lze velmi efektivně řešit libovolné soustavy s číselnými koeficienty (resp. s koeficienty z nějakého pole P). Připomeňme, že postup spočívá v převedení rozšířené matice $\bar A$ na Gauss–Jordanův tvar řádkovými úpravami (čímž se nemění množina řešení soustavy).

1. Řádková hodnost matice

Řádková hodnost je definována jako dimenze podporostoru generovaného jejími řádky:

1.1. Definice. Buď A matice typu m/n nad polem P. Označme $A_1 = (A_{11}, \dots, A_{1n}) \in P^n$, $\dots$, $A_m = (A_{m1}, \dots, A_{mn}) \in P^n$ její řádky. Uvažujme o podprostoru $[\![A_1, \dots, A_m]\!] \subseteq P^n$ generovaném řádky matice A. Označme $\operatorname{rk} A = \dim [\![A_1, \dots, A_m]\!]$ jeho dimenzi. Číslo $\operatorname{rk} A$ se nazývá *řádková hodnost* matice A.

1.2. Tvrzení. *Elementární řádkové úpravy nemění řádkovou hodnost matice.*

Důkaz. Elementární řádkové úpravy nemění prostor $[\![A_1, \dots, A_m]\!]$, protože spočívají v náhradě řádků jejich lineárními kombinacemi s ostatními řádky.

1.3. Důsledek. *Řádkově ekvivalentní matice mají stejnou řádkovou hodnost.*

Hodnost matice lze velmi snadno zjistit převedením na schodovitý tvar.

1.4. Tvrzení. *Buď A matice typu m/n s řádky $A_1, \dots, A_m$, buď A' řádkově ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru. Nechť má A' právě h nenulových řádků $A'_1, \dots, A'_h$. Pak platí $\operatorname{rk} A = h$ a řádky $A'_1, \dots, A'_h$ tvoří bázi prostoru $[\![A_1, \dots, A_m]\!]$.*

Důkaz. Hodnost $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$ nemůže být větší než h, protože podprostor $[\![A_1, \dots, A_m]\!] = [\![A'_1, \dots, A'_h, 0, \dots, 0]\!] = [\![A'_1, \dots, A'_h]\!]$ má jen h generátorů. Ukažme, že tyto generátory jsou nezávislé. Proveďme řádkové úpravy převádějící A' za schodovitého tvaru na Gauss–Jordanův tvar A'' s řádky $A''_1, \dots, A''_h, 0, \dots, 0$. Tyto úpravy neovlivní ani počet ani nezávislost nenulových řádků. Abychom dokázali nezávislost řádků $A''_1, \dots, A''_h$, řešme rovnici $0 = c_1 A''_1 + c_2 A''_2 + \dots + c_h A''_h$ s neznámými $c_1, \dots, c_h$. V matici A'' máme h hlavních prvků $A''_{1,j_1} = \dots = A''_{h,j_h} = 1$, ostatní prvky ve sloupcích s indexy $j_1, \dots, j_h$ jsou nulové, načež

$$0 = c_1 A''_1 + c_2 A''_2 + \dots + c_h A''_h = \begin{pmatrix} \cdots & c_1 & \cdots & c_2 & \cdots & c_h & \cdots \end{pmatrix},$$

tj. v j_i-té pozici takto získaného řádku stojí přímo koeficient c_i. Odtud $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 0$, což dokazuje lineární nezávislost vektorů $A''_1, \dots, A''_h$. Tudíž, $\operatorname{rk} A = \dim [\![A_1, \dots, A_m]\!] = \dim [\![A'_1, \dots, A'_h]\!] = \dim [\![A''_1, \dots, A''_h]\!] = h$.

2. Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava s nulovou pravou stranou, $b = 0$, se nazývá *homogenní.* Množina Ξ všech řešení homogenní soustavy je vektorový podprostor v prostoru P^n. Skutečně, 0 je vždy řešením; jsou-li $x, y \in \Xi$ dvě řešení takové soustavy, pak $x+y$ je opět řešení, protože $A(x+y) = Ax + Ay = 0$; nakonec, je-li x řešení, pak cx je řešení pro libovolný skalár $c \in P$, protože $Acx = cAx = 0$.

Báze prostoru Ξ se nazývá *fundamentální soustava řešení.* Každé jiné řešení je pak jistou lineární kombinací řešení z fundamentální soustavy.

2.1. Tvrzení. *Vektorový prostor Ξ všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ má dimenzi $n - \operatorname{rk} A$, kde n je počet neznámých.*

Důkaz. Jelikož řádkové úpravy nemění množinu Ξ všech řešení soustavy, můžeme předpokládat, že matice A je v Gauss–Jordanově tvaru. Nechť jsou $j_1, \dots, j_h$ indexy hlavních sloupců. Vektor neznámých $x = (x_1, \dots, x_n)$ rozložíme na část hlavní $x' = (x_{j_1}, \dots, x_{j_h}) \in P^h$, odpovídající hlavním sloupcům, a zbytek $x'' = (x_{j'_1}, \dots, x_{j'_{n-h}}) \in P^{n-h}$. Symbolicky budeme zapisovat $x = (x', x'')$. Proměnné $x_{j_1}, \dots, x_{j_h}$ se nazývají *hlavní,* zatímco ostatní proměnné $x_{j'_1}, \dots, x_{j'_{n-h}}$ se nazývají *parametrické.* Podobně rozlišujeme hlavní a parametrické indexy, přičemž $\{j_1, \dots, j_h\} \cup \{j'_1, \dots, j'_{n-h}\} = \{j_1, \dots, j_n\}$ a $\{j_1, \dots, j_h\} \cap \{j'_1, \dots, j'_{n-h}\} = \emptyset$.

Matici A poté rozložíme na hlavní sloupce A' a zbytek A'' tak, aby naše soustava byla ekvivalentní soustavě

$$A'x' + A''x'' = 0.$$

Vynecháme-li přitom nulové řádky (je jich $m - h$), bude $A' = E$ (protože na diagonálu padnou právě hlavní prvky, tj. jedničky, a ostatní prvky budou nulové), načež soustava $Ax = 0$ přejde v $Ex' + A''x'' = 0$, tj.

$$x' = -A''x''.$$

K libovolnému vektoru parametrů $x'' = z \in P^{n-h}$ potom máme právě jedno řešení $x = (-A''z, z)$, sestávající jednak z parametrů z, jednak z vypočtených hlavních neznámých $x' = -A''z$. Zobrazení $z \longmapsto (-A''z, z)$ je bijekce $P^{n-h} \longrightarrow \Xi$ a je lineární (ověřte), tedy izomorfismus. Tudíž, vektorový prostor Ξ je izomorfní s prostorem P^{n-h}, a proto má dimenzi $\dim \Xi = \dim P^{n-h} = n - h$.

Fundamentální řešení (tj. bázi v prostoru všech řešení) najdeme tak, že za z volíme po řadě bázové vektory

$$z_{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^\top, \quad \dots \quad , z_{(n-h)} = (0, \dots, 0, 1)^\top \in P^{n-h}$$

a vypočteme $n - h$ vektorů $x_{(1)} = (-A''z_{(1)}, z_{(1)})$, …, $x_{(n-h)} = (-A''z_{(n-h)}, z_{(n-h)})$.

Příklad. Soustava s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je v Gauss–Jordanově tvaru a má hlavní sloupcové indexy $2, 4, 5$, takže hlavní neznámé jsou x_2, x_3, x_5 a parametrické neznámé jsou x_1, x_4. Soustava je ekvivalentní rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

(poslední, nulový řádek, jsme již vynechali), to jest,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -2x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Množina všech řešení je $\{(x_1, -x_4, -2x_4, x_4, 0) \mid (x_1, x_4) \in P^2\}$, čili

$$\{x_1 \cdot (1, 0, 0, 0, 0) + x_4 \cdot (0, -1, -2, 1, 0) \mid (x_1, x_4) \in P^2\}.$$

Vektory $(1, 0, 0, 0, 0)$ resp. $(0, -1, -2, 1, 0)$ tvoří bázi v 2-rozměrném prostoru všech řešení, tj. fundamentální řešení; získáme je volbou $(x_1, x_4) = (1, 0)$ resp. $(x_1, x_4) = (0, 1)$.

3. Nehomogenní soustavy lineárních rovnic

Víme již, že množina všech řešení homogenní soustavy je vektorový prostor. K vyjádření obecného řešení nehomogenní soustavy pak stačí znát alespoň jedno její další řešení.

3.1. Tvrzení. *Buď ξ_* libovolné pevně zvolené řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Pak je množina všech řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$ rovna množině*

$$\{\, \xi + \xi_* \mid \xi \text{ je řešení homogenní soustavy } Ax = 0 \,\}.$$

Důkaz. Je-li $x = \xi$ libovolné řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, pak je $\xi + \xi_*$ řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Podle předpokladů totiž $A\xi = 0$ a $A\xi_* = b$, načež $A(\xi + \xi_*) = 0 + b = b$.

A naopak, každé řešení $x = \eta$ nehomogenní soustavy $Ax = b$ je tvaru $\eta = \xi + \xi_*$ pro vhodné ξ. Abychom to dokázali, položme $\xi = \eta - \xi_*$, načež $A\xi = A(\eta - \xi_*) = b - b = 0$, a tudíž ξ je řešení homogenní soustavy.

Shora uvedené libovolné řešení ξ_* nehomogenní soustavy se nazývá *partikulární řešení*. Lze říci, že *obecné řešení* nehomogenní soustavy je součtem libovolně zvoleného partikulárního řešení nehomogenní soustavy a obecného řešení příslušné homogenní soustavy. Obecné řešení nehomogenní soustavy obecně netvoří vektorový prostor (jde o tzv. afinní prostor, se kterým se lze setkat v analytické geometrii).

Upozorněmě však, že partikulární řešení vůbec nemusí existovat, tj. obecné řešení Ξ může být prázdná množina. S příklady takových situací jsme se již setkali i při řešení soustav Gaussovou eliminací.

3.2. Důsledek. *Buď ξ_* libovolné partikulární řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$. Buď $\eta_1, \dots, \eta_r$ fundamentální řešení homogenní soustavy $Ax = 0$. Pak množina všech řešení nehomogenní soustavy $Ax = b$ je rovna množině*

$$\{\, \xi_* + p_1\eta_1 + \cdots + p_r\eta_r \mid p_1, \dots, p_r \in P \,\}.$$

Příklad. Homogenní soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

má při volbě hlavních neznámých x_1, x_2 řešení

$$x_1 = -2x_3, \qquad x_2 = -x_3 - x_4.$$

Fundamentální soustava řešení je například dvojice $(-2, -1, 1, 0)$ a $(0, -1, 0, 1)$, která vznikla volbou $(x_3, x_4) = (1, 0)$ resp. $(0, 1)$.

Nehomogenní soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

má za partikulární řešení například $\xi_* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Její obecné řešení je potom

$$(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) + p_1(-2, -1, 1, 0) + p_2(0, -1, 0, 1).$$

Jiná (partikulární) řešení získáme jinou volbou parametrů p_1, p_2. Například při volbě $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 0$ dostaneme řešení $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3})$.

4. Sloupcová hodnost matice

Jak se dá očekávat, *sloupcová hodnost* matice A je definována jako dimenze podprostoru generovaného sloupci matice A. Označme ji dočasně jako $\operatorname{rk}^\top A$.

4.1. Tvrzení. *Sloupcová a řádková hodnost matice jsou si rovny, tj.* $\operatorname{rk}^\top A = \operatorname{rk} A$.

Důkaz. Uvažujme o lineárním zobrazení $\alpha : P^n \longrightarrow P^m$, $x \longmapsto Ax$. Víme, že

$$\dim \operatorname{Ker} \alpha = \dim\{x \in P^n \mid Ax = 0\} = n - \operatorname{rk} A.$$

Z druhé strany,

$$\dim \operatorname{Ker} \alpha = n - \dim \operatorname{Im} \alpha = n - \operatorname{rk}^\top A.$$

Zde jsme použili rovnost $\dim \operatorname{Im} \alpha = \dim [\![\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n)]\!] = \operatorname{rk}^\top A$, kde e_i je standardní báze v P^n a poslední rovnost plyne z toho, že $\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n)$ jsou sloupce matice A (přesněji je řeč o jejich složkách vzhledem ke standardní bázi prostoru P^m).

Sloupcovou hodnost matice A můžeme rovnocenně zavést jako řádkovou hodnost $\operatorname{rk} A^\top$ matice transponované (připomeňme, že transponování matice je úkon, při němž se řádky převádějí na sloupce a naopak). Odtud

4.2. Důsledek. *Platí* $\operatorname{rk} A^\top = \operatorname{rk} A$.

5. Frobeniova věta

Ohledně řešitelnosti a počtu řešení pak platí:

5.1. Věta Frobeniova. *Soustava* (1) *má alespoň jedno řešení právě tehdy, když platí*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}.$$

5.2. Důkaz. Nějaká n-tice skalárů $\xi_1, \dots, \xi_n$ je řešením soustavy (1) právě tehdy, když platí rovnost

$$A_1\xi_1 + \dots + A_n\xi_n = b,$$

kde A_i označuje i-tý sloupec matice A a b označuje poslední sloupec matice $\bar{A}$ (sloupec pravých stran). Taková n-tice $\xi_1, \dots, \xi_n$ existuje právě tehdy, když je sloupec b závislý na sloupcích $A_1, \dots, A_n$, tj. $b \in [\![A_1, \dots, A_n]\!]$, což nastává právě tehdy, když

$$[\![A_1, \dots, A_n, b]\!] = [\![A_1, \dots, A_n]\!].$$

Potom ale $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^\top = \dim [\![A_1, \dots, A_n, b]\!] = \dim [\![A_1, \dots, A_n]\!] = \operatorname{rk} \bar{A}^\top = \operatorname{rk} \bar{A}$.

Naopak, jestliže jsou si sloupcové hodnosti matic A a $\bar{A}$ rovny, pak $\dim [\![A_1, \dots, A_n]\!] = \dim [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$. Protože je $[\![A_1, \dots, A_n]\!] \subseteq [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$ podprostor, plyne z rovnosti dimenzí hledaná rovnost $[\![A_1, \dots, A_n]\!] = [\![A_1, \dots, A_n, b]\!]$.

Je-li $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \bar{A}$, pak má soustava $Ax = b$ obecné řešení, které závisí na p nezávislých parametrech, kde $p = n - \operatorname{rk} A$. Dokážeme i toto tvrzení, ale v mnohem přesnější podobě.

6. Cramerovo pravidlo

Řešíme-li nepříliš rozsáhlou soustavu lineárních rovnic s numerickými koeficienty, není třeba uvažovat o jiné metodě, než je Gaussova eliminace. Při řešení na počítači určité problémy vznikají jen v souvislosti s konečným počtem platných cifer. Pro dosažení maximální přesnosti nesmí být hlavní prvky blízké k nule. Obvykle stačí vybrat jako hlavní ten prvek, který má ze všech přípustných maximální absolutní hodnotu. Existují také numerické metody iterační, které dovolují poměrně rychle získat přibližné řešení po konečném počtu kroků. Zvláštní metody existují i pro řídké soustavy, což jsou soustavy s malým počtem nenulových koeficientů.

Jakmile se však stane, že koeficienty soustavy závisí na nějakém parametru, pak se Gaussova eliminace komplikuje. Častým krokem je totiž dělení řádku výrazem s parametry, což je elementárni úprava jen tehdy, když jde o výraz nenulový. Podle tohoto kriteria se úloha větví na řadu dílčích případů. Zmíněná podmínka však nemusí mít nic společného s řešitelností samotné soustavy (ta závisí jen na hodnosti matice) a množství dílčích případů k prozkoumání proto bývá zbytečně velké. Tomu lze zabránit volbou jiného postupu, který si vyložíme v případě, že matice A soustavy je čtvercová.

6.1. Tvrzení. *Nehomogenní soustava $Ax = b$ s invertibilní čtvercovou maticí A má pro každou pravou stranu b jediné řešení*

$$x = A^{-1}b.$$

Důkaz. Je-li A invertibilní, pak $x = A^{-1}b$ je řešení (ověřte). Je-li ξ řešení, pak $A\xi = b$, a tedy $\xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}b$.

Pro řešení $x = A^{-1}b$ lze najít elegantní vyjádření:

6.2. Cramerovo pravidlo. *Buď $Ax = b$ nehomogenní soustava s invertibilní čtvercovou maticí A a řešením $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Pak*

$$\xi_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A záměnou i-tého sloupce sloupcem pravých stran b:

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Důkaz. Při rozvoji podle i-tého sloupce dostáváme $\det A_i = \sum_j \widehat{A}_{ji} b_j$. Dále

$$\xi = A^{-1}b = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}\, b = \frac{\widehat{A}^\top}{\det A}\, b = \frac{\widehat{A}^\top b}{\det A},$$

a tedy

$$\xi_i = \frac{\sum\limits_i \widehat{A}^\top_{ij} b_j}{\det A} = \frac{\sum\limits_i \widehat{A}_{ji} b_j}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Použitím Cramerova pravidla lze dosáhnout toho, že jediným dělením bude dělení determinantem soustavy, čímž se vyloučí nadbytečná větvení, která by se jinak vyskytla u Gaussovy eliminace. Připomeňme, že výpočet determinantů se v principu obejde bez dělení.

Cvičení. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ \alpha x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ -x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Návod: Determinant matice soustavy jest $\alpha(3\alpha - 4)$. Pro hodnoty $\alpha \neq 0$ a $\alpha \neq \frac{4}{3}$ je matice soustavy nesingulární a soustava má jediné řešení, které lze vypočíst pomocí Cramerova pravidla. Pro hodnoty $\alpha = 0$ a $\alpha = \frac{4}{3}$ se použije Gaussova eliminace (pro $\alpha = 0$ vyjde nekonečně mnoho řešení, pro $\alpha = \frac{4}{3}$ nevyjde žádné řešení).

Cvičení. Nehomogenní soustava $Ax = b$ se čtvercovou maticí A je řešitelná pro každou pravou stranu b jen tehdy, když je matice A invertibilní. Dokažte.

Návod: Je-li soustava $Ax = b$ řešitelná pro každou pravou stranu, pak je řešitelná pro pravé strany $b_1 = (1, 0, \dots, 0)$ až $b_n = (0, \dots, 0, 1)$. Příslušná řešení $\xi_1, \dots, \xi_n$ nechť tvoří sloupce matice X. Pak je $AX = E$ a matice X je inverzní k A.

Popis podprostorů v P^s homogenními soustavami

Jedna z úloh lineární algebry zní: *k danému podprostoru v P^s najděte homogenní soustavu, která jej určuje.*

6.3. Tvrzení. *Každý podprostor $[\![v_1, \dots, v_m]\!] \subseteq P^s$ je roven prostoru všech řešení homogenní soustavy $Av = 0$, kde A je vhodná matice typu r/s, přičemž $r = s - \dim [\![v_1, \dots, v_m]\!]$.*

Důkaz. Hledáme matici A splňující

$$Av_i = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

což je totéž, jako

$$AV = 0, \tag{3}$$

kde V je matice s m sloupci $v_1, \dots, v_m$. Transponujeme-li na obou stranách, obdržíme

$$V^\top A^\top = 0; \tag{4}$$

zde $V^\top$ je matice s *řádky* v_i. Podmínka (4) je ekvivalentní s (3), a tedy i s (2).

Řádky hledané matice A označíme $a_j \in P^s$, $j = 1, \dots, r$ (odpovídají jednotlivým rovnicím soustavy); po transponování přejdou ve sloupce matice $A^\top$. Soustavu (4) pak ekvivalentně zapíšeme jako

$$V^\top a_j = 0 \quad \text{pro každé } j = 1, \dots, r. \tag{5}$$

Soustava (4) je homogenní, matice soustavy $V^\top$ je známa. Hledanou matici A sestavíme tak, že její řádky a_j budou tvořeny některou fundamentální soustavou řešení soustavy (4).

Označme Ξ_A prostor všech řešení homogenní soustavy $Av = 0$. Máme $v_i \in \Xi_A$, odtud inkluze $[\![v_1, \dots, v_m]\!] \subseteq \Xi_A$. Přitom platí $\dim \Xi_A = s - \operatorname{rk} A = s - (s - \operatorname{rk} V^\top) = \operatorname{rk} V^\top = \dim [\![v_1, \dots, v_m]\!]$. Tudíž, $\Xi_A = [\![v_1, \dots, v_m]\!]$.

Příklad. K podprostoru v P^4 s generátory $(1,0,2,0)$, $(0,1,1,1)$ najděme příslušnou homogenní soustavu. Řešme soustavu $V^\top a = 0$, čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

s hlavními neznámými x_1, x_2, parametrickými neznámými x_3, x_4 a řešením

$$x_1 = -2x_3, \qquad x_2 = -x_3 - x_4.$$

Fundamentální soustava řešení je $(-2,-1,1,0)$ a $(0,-1,0,1)$. Tudíž, hledaná matice homogenní soustavy bude

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vyhovuje i libovolná matice řádkově ekvivalentní s právě nalezenou maticí.

Není obtížné najít součet podprostorů zadaných generátory resp. průnik podprostorů zadaných homogenními soustavami:

Cvičení. Ukažte, že $[\![u_1,\dots,u_i]\!] + [\![u_{i+1},\dots,u_n]\!] = [\![u_1,\dots,u_i,u_{i+1},\dots,u_n]\!]$.

Cvičení. Podobně, $\{x \mid A'x = 0\} \cap \{x \mid A''x = 0\} = \{x \mid Ax = 0\}$, kde

$$A = \left(\begin{array}{c} A' \\ \hline A'' \end{array}\right),$$

Protože zadání podprostoru generátory umíme převádět na zadání homogenním systémem a naopak, umíme najít i součet podprostorů zadaných homogenními soustavami resp. průnik podprostorů zadaných generátory.